Ueber

die Steiner'sche Fläche.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)
der K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 15. Februar 1901

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Adam Goller
aus Hof.

ACAD.
GOLBAT.
BIBL.

München 1902.
Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Curriculum vitae.

Ich wurde geboren am 27. Mai 1878 zu Hof a/S. als Sohn des Schmiedemeisters Gottlieb Goller und dessen Ehefrau Babette, geb. Staudt, und bin protestantischer Konfession. In den Jahren 1884—87 besuchte ich die Volksschule, von 1887—96 das humanistische Gymnasium zu Hof. Hierauf bezog ich die Universität München, um mich hier und an der technischen Hochschule München dem Studium der Mathematik zu widmen. In den Jahren 1898 und 1900 bestand ich die zwei Abschnitte des Lehramtsexamens für Mathematik und Physik. Mit Beginn des Jahres 1901 erhielt ich meine erste Staatsanstellung als Assistent an der kgl. Ludwigs-Kreisrealschule München.

An der Universität besuchte ich Vorlesungen und Uebungen bei den Herren Professoren und Dozenten: v. Baeyer, G. Bauer, Blinkhorn, Brentano, Döhlemann, Donle, Erk, v. Heigel, Korn, F. Lindemann, v. Lommel, v. Müller, Pringsheim, Seeliger, Woerner; an der technischen Hochschule bei den Herren Professoren und Dozenten: v. Braunmühl, v. Dyck, Ebert, Finsterwalder, Fischer, Günther, v. Reber, v. Reinhardstöttner. Allen diesen Herren, insbesonders den Herren Professoren Bauer und Lindemann bin ich für die Förderung meiner Studien zu hohem Dank verpflichtet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548325_0094

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Teil.

Algebraische und geometrische Grundlagen.

§ 1. Die Fundamentalkombinanten der Formen $A_i a_x^2$ . . 3
§ 2. Systeme konjugierter Kegelschnitte. Geometrische Eigenschaften des linearen Kegelschnittsystems der 1. und 3. Stufe 8
§ 3. Algebraische Untersuchung von $u_\varrho^2 r_x$ 12

II. Teil.

Geometrie auf der Steiner'schen Fläche mit Zugrundelegung ternärer Formen.

§ 4. Allgemeines über die Kurven auf S 18
§ 5. Ebene durch 3 Punkte, die 2 K.-Sch. auf einer Tangentialebene 20
§ 6. Gerade durch 2 Punkte, die 2 weitern Schnittpunkte, die 3 Tangentialebenen durch dieselbe; Haupttangenten . . 22
§ 7. Kegel von Tangentialebenen durch 1 Punkt von S, als binäres Gebilde 28
§ 8. Singuläre Elemente auf S 35
§ 9. Schnitt von S mit einer Fläche 39
§ 10. System der Asymptotenlinien, gegeben durch eine binär-ternäre Form 44

III. Teil.

Quaternäre Gebilde (Uebertragungsprincip).

§ 11. $U_A a_x^2$; Polarpunkt 46
§ 12. Die durch eine rationale Raumkurve 4. O. auf S bestimmten Flächen 49
§ 13. Die Lie'schen Flächen 54
§ 14. Die rationalen R_4 auf S, insbesonders die Asymptotenkurven 57
§ 15. Die Hesse'sche Fläche von S (als Fläche 3. Klasse) . . 62
§ 16. Die Tangenten von S (Gleichung von S in Linienkoordinaten) 64
§ 17. Die Tangentialebenen von S (Gleichung von S in Punktkoordinaten) 66

Einleitung.

Sind X_1, X_2, X_3, X_4 die homogenen Tetraederkoordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum, so liegt dieser Punkt auf einer bestimmten Fläche, wenn wir seine Koordinaten in folgender Weise von 3 homogenen, also 2 wesentlichen Parametern abhängen lassen:

$$\begin{aligned}
\sigma X_1 &= f_1(x) = \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^\varkappa a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = a_x^2 \text{ [1]} \\
\sigma X_2 &= f_2(x) = \sum\sum b_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = b_x^2 \\
\sigma X_3 &= f_3(x) = \sum\sum c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = c_x^2 \\
\sigma X_4 &= f_4(x) = \sum\sum d_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = d_x^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dabei bedeutet σ als Proportionalitätsfaktor eine beliebige Zahl; ferner wählen wir die $f_i(x)$ so, dass sie linear unabhängig sind, d. h. dass es keine Relation gibt:

$$\varkappa_1 f_1(x) + \varkappa_2 f_2(x) + \varkappa_3 f_3(x) + \varkappa_4 f_4(x) = 0$$

für jeden Wert x_1, x_2, x_3. Da die f_i je von 5 wesentlichen Parametern abhängen, ist es ja stets möglich, die f_i in der angegebenen Weise zu wählen.

Wie Weierstrass gezeigt hat,[2]) ist durch die Formeln (1) stets eine „Steiner'sche Fläche" — von Steiner selbst „Römerfläche" genannt — gegeben, eine Fläche 4. Ordnung, deren

[1]) Wir verwenden in dieser Arbeit die von Clebsch und Gordan eingeführte symbolische Schreibart algebraischer Formen; äquivalente Symbole in mehreren Reihen werden durch dieselben Buchstaben mit Strichen geschrieben.

[2]) s. Steiner's Ges. Werke II. Bd. Anhang. Aeltere Litteratur bei Sturm, Mathem. Ann. Bd. 3.

wesentliches Merkmal das ist, dass der Schnitt einer Tangentialebene aus 2 Kegelschnitten besteht.

Wir werden im folgenden versuchen, aus der in (1) gegebenen Definition der Fläche die Eigenschaften derselben abzuleiten; dabei werden wir die Formeln (1) zusammenfassen in eine einzige, und zwar so: wenn wir festsetzen, dass erst 1 Symbol A mit 2 Symbolen a reale Bedeutung hat, können wir an Stelle der 4 Formen $f_i(x)$ die 4 Formen $A_i a_x^2$ treten lassen, und (1) ist dann in der Aussage enthalten, dass

$$U_A a_x^2 = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung eines Punktes der betrachteten Fläche ist; dabei sind die U_i die zu den X_i kontragredienten Ebenenkoordinaten. Unsere Aufgabe können wir jetzt formulieren als das Studium der quaternär-ternären Form (2) und der durch sie gegebenen räumlichen Verhältnisse. Dass die algebraische Seite der Aufgabe hier mehr in den Vordergrund gestellt wurde, als sonst üblich, ist daraus zu erklären, dass die wichtigeren Eigenschaften der Steiner'schen Fläche ja längst bekannt sind, während Untersuchungen über Formen mit Variablen verschieden-dimensionaler Gebiete bisher wenig gemacht wurden, insbesonders, soviel bekannt, keine über quarternär-ternäre Formen.[1]) So kommt es, dass zuweilen die algebraische Form als das primäre und ihre geometrische Deutung als das sekundäre auftritt.

Die Anregung zur Arbeit empfing ich von Herrn Universitäts-Professor Dr. F. Lindemann, dem ich hiefür, wie für vielfache wohlwollende Unterstützung bei der Ausführung zu hohem Dank verpflichtet bin.

[1]) Formen mit Variabeln verschiedener Gebiete verwenden insbesondere Study, Hab.-Schrift, ferner Sitzungsbericht der sächs. Akad. 1886, dann Gross, Inaug.-Diss. (Kombinaten binärer Formensysteme etc.), Stroh, s. bes. Progr. der Ludwigs-Realschule München 1894. Im wesentlichen verfolgt unsere Arbeit dieselbe Tendenz wie etwa folgende Untersuchungen über rationale Kurven: Rosenow, ebene C_3 mit Doppelp., Inaug.-Diss., 1873; Armenante, Rationale Raumkurve 4. O., Battagl. Giornale 11. 12.

I. Teil.

§ 1.

Um auf analytischem Wege die Eigenschaften der durch (2) definierten Fläche zu ergründen, bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten dar. Indem wir verlangen, dass verschiedene Punkte x, y, z, t ... der Fläche eine — in projektivem Sinne — ausgezeichnete Lage zu einander haben, werden wir dies durch Gleichungen ausdrücken, die nur ternäre Variable enthalten, also zu Kurven auf der Fläche führen. Betrachten wir aber in (2) die quaternären Variabeln U als fest, und verlangen, dass der Schnitt der Fläche mit der Ebene U eine bestimmte Eigenschaft hat, so werden wir Gleichungen für die U_i, d. h. räumliche Gebilde in kovariantem Zusammenhang mit der Steiner'schen Fläche — abgekürzt mit S — erhalten. Wir betreten zunächst den ersteren Weg.

Haben wir 2 Punkte x, y von S, so bestimmen dieselben eine Gerade, ihre Verbindungslinie; ihre Gleichung finden wir durch Elimination der U_i aus

$$U_A\, a_x^2 = 0; \quad U_A\, a_y^2 = 0; \quad U_X = 0, \quad U_Y = 0$$

als

$$(A\, A'\, X\, Y)\, a_x^2\, a_y'^2 = 0, \tag{3}$$

wobei Aa, $A'a'$ äquivalente Symbole sind, X_i, Y_i Koordinaten von Raumpunkten.

Es ist nun wichtig, alle ähnlichen Formen mit mehreren ternären Variablen, wie sie im folgenden sehr häufig noch auftreten werden, durch Polaren von Formen mit einer Variabeln oder mit je einer der kontragredienten Variabeln x, u darzustellen, eine Operation, die man als „Reihenentwicklung“

zu bezeichnen pflegt, und welche die Herstellung eines „reducierten äquivalenten Systems von Formen“ zur Voraussetzung hat.[1]) Wir bemerken gleich jetzt, dass alle Formen wie (3) auf „Kombinanten“[2]) der ursprünglich vorliegenden 4 quadratischen Formen $f_i = A_i a_x^2$ führen, d. h. auf Kovarianten der f_i, die sich nur um numerische Faktoren ändern, wenn man die f_i durch lineare Kombinationen derselben ersetzt. So sind z. B. die Koordinaten der Geraden (3)

$$p_{12} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1(y) & f_2(y) \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Ersetzt man f_2 durch $\lambda f_1 + \mu f_2$, so gibt die Determinante

$$p'_{12} = \begin{vmatrix} f_1(x) & \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) \\ f_1(y) & \lambda f_1(y) + \mu f_2(y) \end{vmatrix}$$

nach bekannten Determinantensätzen wieder $\mu \cdot p_{12}$.

Die Form (3) nun lässt sich unmittelbar als Polare darstellen:

$$(A\,A'\,X\,Y)\,a_x^2\,a_y'^2 = \tfrac{1}{2}\,\Delta_{xy}\,[(A\,A'\,X\,Y)\,a_x\,a_x'\,(a\,a'\,\widehat{xy})]. \quad (4)$$

Dabei bezeichnet $\Delta_{xy} f$ die Polarenoperation:

$$\Delta_{xy} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,y_3.$$

Man sieht: ist y ein zu x benachbarter Punkt, $x + dx$, so stellt

$$(A\,A'\,X\,Y)\,a_x\,a_x'\,(a\,a'\,\widehat{x\,dx}) = 0 \quad (5)$$

die Verbindungslinie von x und $x + dx$, die Tangente in x, in der Richtung nach $x + dx$ vor. Die Form (5) definiert so die durch $U_A\,a_x^2 = 0$ als Punktgebilde gegebene S als Tangentengebilde; die Theorie der Form $(A\,A'\,X\,Y)\,a_x\,a_x'(a\,a'\,u)$ ist daher ein Teil unserer Aufgabe.

---

[1]) Vergl. Clebsch-Lindemann, I, 7. Abteilung.

[2]) s. insbes. Gordan im 5. Band der Mathem. Annalen, sowie in unserm speziellen Fall Rosanes, Mathem. Annalen Bd. 6, „Ueber Systeme von Kegelschnitten“.

3 Punkte, x, y, z, liefern uns eine Ebene, die sie verbindet, und die Gleichung hat:

$$(A\,A'\,A''\,X)\,a_x^2\,a_y'^2\,a_z''^2 = 0. \tag{6}$$

Hier ist die Reihenentwicklung nicht ganz so einfach wie vorhin.

Es zeigt sich (s. „Rosanes“ S. 278 f.), dass das „reducierte äquivalente System“ aus 2 Formen besteht:

$$\begin{aligned} M_X\,m_x^3 &= (A\,A'\,A''\,X)\,a_x\,a_x'\,a_x''\,(a\,a'\,a''); \\ N_X\,u_\nu^3 &= (A\,A'\,A''\,X)\,(a\,a'\,u)\,(a\,a''\,u)\,(a'\,a''\,u) \end{aligned} \tag{7}$$

Aus Polaren dieser 2 Formen $M_X\,m_x^3$, $N_X\,u_\nu^3$ setzt sich dann (6) in folgender Weise zusammen:

$$\begin{aligned} &6\,(A\,A'\,A''\,X)\,a_x^2\,a_y'^2\,a_z''^2 \\ &= (A\,A'\,A''\,X)\,(a_x^2\,a_y'^2\,a_z''^2) \\ &= 4\,(x\,y\,z)\,M_X\,m_x\,m_y\,m_z - 2\,N_X\,(x\,y\,\nu)\,(y\,z\,\nu)\,(z\,x\,\nu). \end{aligned} \tag{8}$$

Wir können auch hier wieder die Bemerkung anfügen, dass die Formen $M_X\,m_x^3$, $N_X\,u_\nu^3$ S als Klassenfläche definieren, indem z. B. $M_X\,m_x^3 = 0$ die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x von S ist.

Eine Relation, in der gar keine quaternären Variabeln vorkommen, erhalten wir endlich, wenn wir die Bedingung aufstellen, dass die 4 Punkte x, y, z, t in einer Ebene liegen, eine Bedingung, die ersichtlich gegeben ist durch

$$(A\,A'\,A''\,A''')\,a_x^2\,a_y'^2\,a_z''^2\,a_t'''^2 = 0. \tag{9}$$

(9) ist die eigentliche „Fundamentalkombinante“ (nach Gordan) der 4 Formen $A_i\,a_x^2$, während (3) und (6) als erweiterte Fundamentalkombinanten (Stroh, Brill) bezeichnet werden.

Aus (8) folgt:

$$\begin{aligned} &6\,(A\,A'\,A''\,A''')\,a_x^2\,a_y'^2\,a_z''^2\,a_t'''^2 \\ &= 4\,(x\,y\,z)\,M_A\,m_x\,m_y\,m_z\,a_t^2 - 2\,N_A\,(\nu\,x\,y)\,(\nu\,y\,z)\,(\nu\,z\,x)\,a_t^2. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$M_A\, m_x^3\, a_x^2 = (A\,A'\,A''\,A''')\, a_x\, a_x'\, a_x''\, a_x'''^2\, (a\,a'\,a'')$$
$$= \tfrac{1}{4}(A\,A'\,A''\,A''')\, a_x\, a_x'\, a_x''\, a_x'''\, [(a\,a'\,a'')\, a_x''' - (a'\,a''\,a''')\, a_x$$
$$+ (a''\,a'''\,a)\, a_x' - (a'''\,a\,a')\, a_x'']$$
$$= 0,$$

da nach der bekannten Identität der Ausdruck in der eckigen Klammer identisch Null ist.

Genau so zeigt man, dass

$$M_A\, m_x^3\, a_x\, a_y = 0.$$

also auch, indem man die 2 Identitäten nach y polarisiert:[1])

$3\, M_A\, m_x^2\, m_y\, a_x^2 + 2\, M_A\, m_x^3\, a_x\, a_y = 0$, oder: $M_A\, m_x^3\, m_y\, a_x^2 = 0$,

$3\, M_A\, m_x^2\, m_y\, a_x\, a_y + M_A\, m_x^3\, a_y^2 = 0$;

aus:

$M_A\, m_x^3\, m_y\, a_x^2 = 0$ folgt ebenso:

$2\, M_A\, m_x\, m_y^3\, a_x^2 + 2\, M_A\, m_x^2\, m_y\, a_x\, a_y = 0$;

also:

$$M_A\, m_x^3\, a_y^2 = -\,3\, M_A\, m_x^2\, m_y\, a_x\, a_y = +\,3\, M_A\, m_x\, m_y^2\, a_x^2$$
$$2\, M_A\, m_x^3\, a_y^2 = M_A\, m_x^3\, a_y^2 - 2\, M_A\, m_x^2\, m_y\, a_x\, a_y + M_A\, m_x\, m_y^2\, a_x^2$$
$$= M_A\, m_x\, (m_x\, a_y - m_y\, a_x)^2 = M_A\, m_x\, (m\,a\,\widehat{x\,y})^2$$
$$M_A\, m_x^3\, a_y^2 = \tfrac{1}{2}\, M_A\, m_x\, (m\,a\,\widehat{x\,y})^2. \qquad (10)$$

Infolge dieser Reduktion lässt sich nun die Form (9) direkt durch Polaren darstellen:

$$\tfrac{6}{2\,4}\,(A\,A'\,A''\,A''')\,(a_x^2\, a_y'^2\, a_z''^2\, a_t'''^2)$$
$$= 4\,(x\,y\,z)\cdot \tfrac{1}{6}\,\Delta_{xy}\,\Delta_{xz}\cdot M_A\, m_x^3\, a_t^2 - 2\cdot\tfrac{1}{6}\,\Delta_{uv}\,\Delta_{uw}\,N_A\,u_v^3\,a_t^2$$
(dabei ist $u_i = (y\,z)_i$; $v_i = (z\,x)_i$; $w_i = (x\,y)_i$ gesetzt)
$$= \tfrac{1}{3}\,\{(x\,y\,z)\cdot\Delta_{xy}\,\Delta_{xz}\cdot M_A\, m_x\, (m\,a\,\widehat{x\,t})^2 - \Delta_{uv}\,\Delta_{uw}\,N_A\,u_v^3\,a_t^2\}. \qquad (11)$$

[1]) s. diese Rechnung auch bei Clebsch, Crelle's Journal Bd. 70, S. 175 ff.

Auf der rechten Seite von (11) treten die 2 Formen auf:

$$M_A\, m_x\, (m\, a\, u)^2, \qquad N_A\, u_\nu^3\, a_l^2.$$

Dieselben lassen sich aber auf ein und dieselbe Form reducieren, wie im folgenden durch direkte Rechnung gezeigt werden soll.

Nach Definition ist (Glchg. 7):

$$M_A\, m_x^3\, a_y^2 = (A\, A'\, A''\, A''')\,(a\, a'\, a'')\, a_x\, a_x'\, a_x''\, a_y'''^2.$$

Durch Anwendung des „Ω-Processes“:

$$\underset{u}{\Omega}\,(x, y)\, f$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}\right) u_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}\right) u_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right) u_3$$

auf die vorstehende Form findet man:

$$3\, M_A\, m_x^2\, a_y\, (m\, a\, u) = (A\, A'\, A''\, A''')\,(a\, a'\, a'')\, a_y'''$$
$$\{(a\, a'''\, u)\, a_x'\, a_x'' + (a'\, a'''\, u)\, a_x\, a_x'' + (a''\, a'''\, u)\, a_x\, a_x'\}$$

$$6\, M_A\, m_x\, (m\, a\, u)^2 = 2\,(A\, A'\, A''\, A''')\,(a\, a'\, a'')$$
$$\{(a'\, a'''\, u)(a''\, a'''\, u)\, a_x + (a''\, a'''\, u)(a\, a'''\, u)\, a_x' + (a\, a'''\, u)(a'\, a'''\, u)\, a_x''\}.$$

Multipliciert man beiderseits mit u_x und schreibt statt $(a\, a'\, a'') \cdot u_x$:

$$(a\, a'\, u)\, a_x'' + (a'\, a''\, u)\, a_x + (a''\, a\, u)\, a_x',$$

so kommt:

$$3\, u_x \cdot M_A\, m_x\, (m\, a\, u)^2$$
$$= (A\, A'\, A''\, A''')\,\{(a'\, a''\, u)\, a_x + (a''\, a\, u)\, a_x' + (a\, a'\, u)\, a_x''\}$$
$$\cdot\,\{(a'\, a'''\, u)\,(a''\, a'''\, u)\, a_x + (a''\, a'''\, u)\,(a\, a'''\, u)\, a_x'$$
$$+ (a\, a'''\, u)\,(a'\, a'''\, u)\, a_x''\}$$
$$= (A\, A'\, A''\, A''')\,\{(a'\, a''\, u)\,(a'\, a'''\, u)\,(a''\, a'''\, u)\, a_x^2$$
$$+ a_x a_x' (a''\, a'''\, u)[(a'\, a''\, u)(a\, a'''\, u) + (a''\, a\, u)(a'\, a'''\, u)]$$
$$+ \ldots .\}.$$

Das Glied mit $a_x\, a_x'$ ist ersichtlich $\equiv 0$, weil beim Vertauschen der äquivalenten Symbole a'', a''' das Zeichen wech-

seind; dagegen sind die Glieder mit $a_x^2, a_x'^2, a_x''^2$ gleich, und bleiben allein übrig, während die übrigen wegfallen. Also:

$$\begin{aligned} 3u_x \cdot M_A m_x (m a u)^2 &= \quad 3(AA'A''A''')(a'a'''u)(a''a'''u)(a'a''u)a_x^2 \\ &= -3(AA'A''A''')(aa''u)(a'a''u)(aa'u)a_x'''^2 \\ &= -3N_A u_\nu^3 a_x^2 \quad (7) \\ N_A u_\nu^3 a_x^2 &= -u_x \cdot M_A m_x (m a u)^2 = -u_x \cdot u_\varrho^2 r_x, \end{aligned}$$

wo also:

$$M_A m_x (m a u)^2 = u_\varrho^2 r_x. \tag{12}$$

Die Gleichung (11) geht mit Benützung von (12) über in:

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{4}(AA'A''A''')(a_x^2 a_y'^2 a_z''^2 a_t'''^2) \\ &= (xyz)\Delta_{xy}\Delta_{xz}[(\varrho x t)^2 r_x] + \Delta_{uv}\Delta_{uw}[u_t \cdot u_\varrho^2 r_t]. \end{aligned} \tag{13}$$

§ 2.

Die analytische Bedingung dafür, dass 4 Punkte x, y, z, t von S auf einer Ebene liegen, führte in § 1 zu Gleichung (13), in der nur Polaren der einzigen Form $u_\varrho^2 r_x$ auftreten, die in (12) durch Symbole A, a definiert ist. Nach dem Gordan'schen Satz über Kombinanten ergibt sich also, dass alle Kombinanten der 4 Formen f_i in (1) Kovarianten allein von $u_\varrho^2 r_x$ sein müssen.

Diese Form ist nicht die allgemeinste ihrer Art, d. h. der Konnexform (1, 2). Unmittelbar aus (12) erkennt man, dass

$$u_\varrho r_\varrho = 0,$$

d. h. dass $u_\varrho^2 r_x$ „Normalform" ist. Allein es wäre mühsam, aus (12) nun abzuleiten, durch welche Relationen zwischen den Koeffizienten (r, ϱ) unsere spezielle Form gekennzeichnet ist. Die Apolaritätstheorie der Kegelschnitte enthebt uns aber dieser Schwierigkeit.

Wir machen dabei in diesem Paragraphen von der Deutung unserer ternären Formen in einer Ebene E Gebrauch.

Die 4 Formen f_i stellen, Null gesetzt, in E 4 Kegelschnitte dar; $\varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \varkappa_3 f_3 + \varkappa_4 f_4 = 0$ gibt dann bei variierenden $\varkappa_i$ ein dreifach unendliches System $K_{(3)}$ von

Kegelschnitten. Nach der genannten Theorie gibt es nun ein einfach unendliches System $K^{(1)}$ von Klassenkurven 2. Grades, $\lambda_1 u_\eta^2 + \lambda_2 u_\vartheta^2 = 0$, das zu $K_{(3)}$ „konjugiert" ist, so dass also jedes Individuum von $K_{(3)}$, a_x^3, die Bedingungen erfüllt:

$$a_\eta^2 = 0, \quad a_\vartheta^2 = 0. \tag{14}$$

Da jede Relation der Art (14) die allgemeinste lineare Gleichung zwischen den 6 homogenen Koeffizienten einer Kegelschnittform darstellt, so bedarf obiger Satz wohl keines weiteren Beweises, weil direkt aus den bekannten Sätzen über lineare Gleichungen folgend.

Ueber die Kombinanten der konjugierten Systeme gilt nun der wichtige Satz, dass die linearen Kombinanten des einen Systems linearen Kombinanten des andern gleich sind.[1]) Nach dem Gordan'schen Kombinantensatz hat das System $K^{(1)}$ bloss eine lineare Kombinante:

$$u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x). \tag{15}$$

Diese muss proportional sein einer linearen Kombinante von $K_{(5)}$; aber nach § 1 reducieren sich alle linearen Kombinanten von $K_{(3)}$ auf $u_\varrho^2 r_x$ bezw. Polaren davon. Da überdies sowohl (15) wie $u_\varrho^2 r_x$ Normalformen sind, so haben wir nur die Möglichkeit, dass $u_\varrho^2 r_x$ und $u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x)$ zu einander proportional sind. Wir denken uns die Formen u_η^2, u_ϑ^2 so gewählt, dass direkt:

$$u_\varrho^2 r_x = u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x). \tag{16}$$

Diese Form[2]) $u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x)$ bietet aber dem Studium viel weniger Schwierigkeiten als die durch (12) gegebene $u_\varrho^2 r_x$. Wir werden im folgenden kurz die wichtigsten Thatsachen, die ja allgemein bekannt sind, anführen.

Einer Geraden v ist durch $v_\varrho^2 r_x = 0$ eine andere „bei-

---

[1]) In unserm speziellen Fall s. „Rosanes": allgemein: Brill, 20. Bd. Math. Annalen S. 330 ff.

[2]) Ueber den allgemeinen Konnex (1, 2) s. Godt, über den Konnex erster Ordnung zweiter Klasse, Inaug.-Diss., Göttingen 1873; auch Clebsch-Lindemann Bd. I. S. 1066 ff.

geordnet", der Ort der Pole von v in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar $u_\eta^2 + \lambda\, u_\vartheta^2 = 0$. Diese Beiordnung wird unbestimmt für die 3 Seiten des gemeinsamen Polardreiecks „$\mathfrak{P}$" der Schaar.[1]) Viermal kommt es vor, dass eine Gerade mit der beigeordneten zusammenfällt, nämlich für die 4 gemeinsamen Tangenten der Schaar (η, ϑ), welche das Vierseit „$\mathfrak{V}$" bilden, dessen Diagonaldreieck $\mathfrak{P}$ ist.

Der Schnittpunkt von $v_x = 0$ mit der beigeordneten Geraden $v_\varrho^2 r_x = 0$ möge der „Hauptpunkt" von v heissen. Dann gilt also: Der Hauptpunkt von v ist gegeben durch $v_\varrho^2 (rvu) = 0$.

Geometrisch ist leicht zu sehen, dass die Beziehung zwischen einer Geraden und ihrer beigeordneten involutorisch ist, d. h. dass die beigeordnete zu $v_\varrho^2 r_x$ wieder v_x ist. [Den algebraischen Beweis führen wir später.] Soll also $v_\varrho^2 r_x$ durch einen bestimmten Punkt y gehen, so muss sein:

$$v_\varrho^2 r_y = 0,$$

d. h. v berührt die Kurve 2. Klasse $u_\varrho^2 r_y = 0$. Also: „Dreht sich v um einen Punkt y, so umhüllt die beigeordnete zu v den Kegelschnitt $C_{(y)}$: $u_\varrho^2 r_y = 0$."

Die beiden Tangenten von y an $C_{(y)}$ sind sich wechselseitig beigeordnet, sie bilden das Linienpaar

$$(\varrho\, x\, y)^2 r_y = 0.$$

Lässt man in $(\varrho\, x\, y)^2 r_y$ x fest sein, so erhalten wir für y eine Kurve 3. Ordnung, als den Ort, auf dem sich die Geraden durch x mit ihren beigeordneten schneiden:

„Der Ort der Hauptpunkte aller Geraden durch y ist die durch

$$(\varrho\, x\, y)^2 r_x = 0$$

gegebene C_3 mit Doppelpunkt in y $(J_{(y)})$."

Die 2 Tangenten an die C_3 $J_{(y)}$ in y sind gegeben durch

$$(\varrho\, x\, y)^2 r_y = 0,$$

also die 2 Tangenten an $C_{(y)}$.

[1]) Jede Gerade durch die einer Seite p_i gegenüber liegende Ecke von $\mathfrak{P}$ ist offenbar p_i beigeordnet. Die 3 Seiten von $\mathfrak{P}$ und die 4 von $\mathfrak{V}$ sind die 7 Grundstrahlen der „Hauptcoincidenz" von $u_\varrho^2 r_x = 0$ (s. Godt).

Die Zwischenstufe zwischen $K^{(1)}$ und $K_{(3)}$ bilden die in $K_{(3)}$ enthaltenen Netze, deren konjugierte Gewebe ihrerseits stets $K^{(1)}$ enthalten.

Wir erhalten ein Netz von $K_{(3)}$, wenn wir alle zu einem K. Sch. $u_x^2 = 0$ konjugierten K. Sch. von $K_{(3)}$ betrachten. Das zu diesem Netz konjugierte Gewebe wird also konstituiert durch u_η^2, u_ϑ^2, $u_\varkappa^2$. Der Ort der Punktepaare dieses Gewebes ist seine „Hermite'sche Kurve“:

$$(\eta\,\vartheta\,x)\,(\eta\,\varkappa\,x)\,(\vartheta\,\varkappa\,x) = 0, \text{ oder } (\varrho\,\varkappa\,x)^2\,r_x = 0, \qquad (17)$$

während durch die „Jacobi'sche“ Kurve:

$$u_\eta\,u_\vartheta\,u_\varkappa\,(\eta\,\vartheta\,\varkappa) = 0 \quad \text{oder} \quad u_\varrho^2\,u_\varkappa\,r_\varkappa = 0 \qquad (18)$$

eine Kurve 3. Klasse gegeben wird, als Ort der Geraden, deren Pole in Bezug auf die Gewebe-Kegelschnitte auf einer Geraden liegen; aus dem Begriff der konjugierten Kegelschnitte folgert man nun aber leicht, dass (17) die Jacobi'sche Kurve des zum Gewebe konjugierten Netzes ist, und (18) dessen Hermite'sche Kurve. Die Eigenschaften der Jacobi'schen und Hermite'schen Kurve sind bekannt. Für uns ist besonders wichtig, dass die Jacobi'sche Kurve auch Ort der Doppelpunkte der Linienpaare des Netzes ist, während die Geraden dieser Linienpaare die Hermite'sche Kurve umhüllen. — Ist $u_\varkappa^2$ speziell ein Doppelpunkt u_y^2, so gehen (17) und (18) über in $J_{(y)}$ und $u_x \cdot C_{(y)}$, wodurch die auf S. 10 aufgeführten Sätze als Spezialisierungen allgemeiner erscheinen.

Wie oben angeführt wurde, enthält die Jacobi'sche Kurve jedes Netzes von $K_{(3)}$ alle Punktepaare des konjugierten Gewebes, also stets die Punktepaare der Schaar (η, ϑ); d. h. diese Jacobi'schen Kurven gehen alle durch die 6 Eckpunkte von $\mathfrak{P}$.

Die Hermite'schen Kurven sind gegeben durch $u_\varrho^2\,r_\varkappa\,u_\varkappa = 0$; da für eine Seite v von $\mathfrak{P}$ $v_\varrho^2\,r_x = 0$, so ist stets $v_\varrho^2\,r_\varkappa\,v_\varkappa = 0$, d. h. alle Hermite'schen Kurven berühren die 3 Seiten von $\mathfrak{P}$.

§ 3.

In § 1 erkannten wir, dass die analytische Behandlung der Geometrie auf S in engerem Sinn, bei der also nur ternäre Variable auftreten, auf die Kovarianten einer einzigen Form $u_\varrho^2 r_x$ führt; in § 2 sahen wir dann, dass diese Form auch geschrieben werden kann $u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x)$. Diese letztere Schreibart ist insofern vorzuziehen, als in ihr die Relationen zwischen den Koeffizienten von $u_\varrho^2 r_x$, welche diese Form als spezielle charakterisieren, identisch erfüllt sind; dagegen enthält sie 2 verschiedene Symbole, so dass ein beliebiger Ausdruck, der im Lauf der Rechnung erscheint, nicht unmittelbar als Kombinante sich zu erkennen gibt. Wir werden deshalb soviel als möglich uns der Schreibart $u_\varrho^2 r_x$ bedienen; dabei zeigt sich, dass die 2 Identitäten $u_\varrho r_\varrho = 0$; $(\varrho \varrho' x) r_{\varrho'} u_\varrho r'_x$ genügen, um alle Umformungen auszuführen. Wir werden in diesem Paragraph einige für das folgende notwendige Rechnungen erledigen, und insbesondere obige zweitgenannte Identität ableiten.

Die linearen Kovarianten von $u_\varrho^2 r_x$ reducieren sich, da $u_\varrho r_\varrho \equiv 0$, wieder auf die Grundform.

Die Formen 2. Grades sind in folgenden Bildungen gegeben:

1) ohne Klammer:

$u_\varrho^2 r_{\varrho'} u_{\varrho'} r'_x = u_\varkappa^3 k_x$;

$u_\varrho u_{\varrho'} r_{\varrho'} r'_\varrho = u_\sigma^2$; $(3 u_\varkappa^2 k_\varkappa = 2 u_\sigma^2)$.

2) 1 Klammer:

$u_\varrho^2 u_{\varrho'}^2 (r r' u) = 0$; $(\varrho \varrho' x) u_\varrho u_{\varrho'} r_x r'_x = 0$;

$(\varrho \varrho' x) r_{\varrho'} u_\varrho r'_x$; $(\varrho \varrho' x) r_{\varrho'} r'_\varrho = 0$.

3) 2 Klammern:

$(r r' u) (\varrho \varrho' x) u_\varrho u_{\varrho'} = u_\lambda^3 l_x$; $(\varrho \varrho' x)^2 r_x r'_x = h_x^4$.

4) $(r r' u) (\varrho \varrho' x)^2 = 0$.

Von diesen Formen ist zunächst eine (1, 3) überflüssig; denn:

$$(r\,r'\,u)\,(\varrho\,\varrho'\,x) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1' & r_2' & r_3' \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \varrho_1' & \varrho_2' & \varrho_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_\varrho & r_{\varrho'} & r_x \\ r_\varrho' & r_{\varrho'}' & r_x' \\ u_\varrho & u_{\varrho'} & u_x \end{vmatrix}$$

$$= r_{\varrho'} r_x' u_\varrho - r_{\varrho'} r_\varrho' \cdot u_x + r_x r_\varrho' u_{\varrho'}$$

(Die Symbole r_ϱ, $r_{\varrho'}'$ sind Null zu setzen.)

$$(r\,r'\,u)(\varrho\,\varrho'\,x) u_\varrho u_{\varrho'} = u_\varrho u_{\varrho'}(r_{\varrho'} r_x' u_\varrho + r_x r_\varrho' u_{\varrho'}) - u_\varrho u_{\varrho'} r_{\varrho'} r_\varrho' \cdot u_x$$

$$u_\lambda^3 l_x = 2 u_x^3 k_x - u_x \cdot u_\sigma^2. \tag{19}$$

Ferner verschwindet die Form $(\varrho\,\varrho'\,x)\,r_{\varrho'} u_\varrho r_x'$ identisch, was wir durch Zuhilfenahme der speziellen Darstellungsform von $u_\varrho^3 r_x$ beweisen.

Die gesuchte Form entsteht aus $u_\varrho v_\varrho r_y \cdot w_{\varrho'} \tilde{\omega}_{\varrho'} r_x'$ durch die Processe:

$$\underset{x}{\Omega}(v, w)\ \ \delta(\tilde{\omega}, y),\ \left(\delta(\tilde{\omega}, y) f = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial \tilde{\omega}_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial \tilde{\omega}_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial \tilde{\omega}_3}\right).$$

Diese Operationen an

$$(u_\eta v_\vartheta + u_\vartheta v_\eta)(\eta\,\vartheta\,y) \cdot (w_{\eta'} \tilde{\omega}_{\vartheta'} + w_{\vartheta'} \tilde{\omega}_{\eta'})(\eta'\,\vartheta'\,x)$$

ausgeführt gibt:

$$[(\eta\,\eta'\,x)\,u_\vartheta + (\vartheta\,\eta'\,x)\,u_\eta]\,(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,(\eta'\,\vartheta'\,x)$$
$$+ [(\vartheta\,\vartheta'\,x)\,u_\eta + (\eta\,\vartheta'\,x)\,u_\vartheta]\,(\eta\,\vartheta\,\eta')\,(\eta'\,\vartheta'\,x).$$

Vertauscht man im ersten Glied $\eta\,\eta'$ mit $\vartheta\,\vartheta'$, so erscheint das zweite.

Das erste Glied liefert, indem man äquivalente Symbole vertauscht:

$$\tfrac{1}{2}(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,u_\eta\,\{(\vartheta\,\eta'\,x)\,(\eta'\,\vartheta'\,x) - (\vartheta'\,\eta'\,x)\,(\eta'\,\vartheta\,x)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,(\eta\,\eta'\,x)\,\{u_\vartheta\,(\eta'\,\vartheta'\,x) - u_{\vartheta'}\,(\eta'\,\vartheta\,x)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,(\eta\,\eta'\,x)\,\{(\eta'\,\vartheta'\,\vartheta)\cdot u_x + (\vartheta\,\vartheta'\,x)\,u_{\eta'}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,(\eta\,\eta'\,x)\,(\vartheta\,\vartheta'\,x)\,u_{\eta'}$$
$$= \tfrac{1}{4}(\vartheta\,\vartheta'\,x)\,(\eta\,\eta'\,x)\,\{(\eta\,\vartheta\,\vartheta')\,u_{\eta'} - (\eta'\,\vartheta\,\vartheta')\,u_\eta\}$$
$$= \tfrac{1}{4}(\vartheta\,\vartheta'\,x)\,(\eta\,\eta'\,x)\,(\widehat{\eta\,\eta'},\ \widehat{\vartheta\,\vartheta'},\ u).$$

Die noch nicht berücksichtigten Glieder geben — wie schon oben erwähnt — dasselbe wie die ersten Glieder, nur

dass $\eta\,\eta'$ mit $\vartheta\,\vartheta'$ vertauscht ist. Dann wechselt aber der Schlussausdruck das Zeichen; das Ganze gibt also Null, wie zu beweisen.

Bedeutend komplicierter gestalten sich die Reduktionen bei den Formen 3. Grades. Die zum Teil mühsamen Rechnungen lassen behaupten, dass alle sich auf folgende 5 Formen zurückführen lassen.

$$p_x^3 = (\varrho\,\varrho'\,\varrho'')^2\, r_x\, r_x'\, r_x''; \quad u_\pi^2 = u_\varrho\, u_{\varrho'}\, u_{\varrho''}\,(\varrho\,\varrho'\,\varrho'')\,(r\,r'\,r'');$$
$$(\varrho\,\sigma\,x)\,u_\varrho\,u_\sigma\,r_x = u_\delta^2\, d_x^2; \quad h_x^3\,(h\,r\,u)\,u_\varrho^2 = u_\varepsilon^3\, e_x^3; \quad u_\varkappa^3\,(k\,r\,u)\,u_\varrho^2 = u_\mu^6.$$

Von den hier einschlägigen Rechnungen führen wir folgende an, durch welche wir den angekündigten algebraischen Beweis dafür erbringen, dass die beigeordnete Gerade zur beigeordneten von v wieder v ist.

Sei $w_x = v_\varrho^2\, r_x$, so ist $w_\varrho^2\, r_x$ die beigeordnete zu w; nun ist

$$\begin{aligned} v_x' &= w_\varrho^2\, r_x = v_\varrho^2\, r_{\varrho'}\, w_{\varrho'}\, r_x' \\ &= \tfrac{1}{3}\,\Delta_{vw}\,[v_\varrho^2\, v_{\varrho'}\, r_{\varrho'}\, r_x'] + \tfrac{2}{3}\,(\varrho\,\varrho'\,\widehat{v\,w})\,v_\varrho\, r_{\varrho'}\, r_x'. \end{aligned} \tag{20}$$

Die Gleichung (20) ist identisch mit folgender ($(v\,w)_i = t_i$ gesetzt)

$$v_x' - v_x^* = v_\varrho^2\, w_{\varrho'}\, r_{\varrho'}\, r_x' - v_\varrho\, v_{\varrho'}\, w_\varrho\, r_{\varrho'}\, r_x' = (\varrho\,\varrho'\,t)\,v_\varrho\, r_{\varrho'}\, r_x'. \tag{20a}$$

Nach Gleichung (19) ist aber:

$$v_\varrho^2\, v_{\varrho'}\, r_{\varrho'}\, r_x' = v_\varkappa^3\, k_x = \tfrac{1}{2}\,(r\,r'\,v)\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, v_{\varrho'} + \tfrac{1}{2}\,v_x \cdot v_\sigma^2$$

also, indem nach w polarisiert wird:

$$2 \cdot 3\, v_\varkappa^2\, w_\varkappa\, k_x$$
$$= (r\,r'\,w)\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, v_{\varrho'} + 2\,(r\,r'\,v)\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, w_{\varrho'} + w_x \cdot v_\sigma^2 + 2\,v_x \cdot v_\sigma\, w_\sigma$$
$$(r\,r'\,w)\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, v_{\varrho'} = (r\,r'\,r'')\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, v_{\varrho'}\, v_{\varrho''}^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(r\,r'\,r'')\,v_\varrho\, v_{\varrho'}\, v_{\varrho''} \cdot ((\varrho\,\varrho'\,x)\,v_{\varrho''} + (\varrho'\,\varrho''\,x)\,v_\varrho + (\varrho''\,\varrho\,x)\,v_{\varrho'})$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(r\,r'\,r'')\,(\varrho\,\varrho'\,\varrho'')\,v_\varrho\, v_{\varrho'}\, v_{\varrho''} \cdot v_x = \tfrac{1}{3}\,v_\pi^3 \cdot v_x,$$

ferner entnehmen wir wieder aus der in (19) gemachten Umformung:

$$\begin{aligned} (r\,r'\,v)\,(\varrho\,\varrho'\,x)\,v_\varrho\, w_{\varrho'} &= v_\varrho^2\, w_{\varrho'}\, r_{\varrho'}\, r_x' - v_\varrho\, w_{\varrho'}\, r_{\varrho'}\, r_\varrho' \cdot v_x + v_\varrho\, w_{\varrho'}\, v_{\varrho'}\, r_x\, r_\varrho' \\ &= v_x' - v_\sigma\, w_\sigma \cdot v_x + v_x^*, \end{aligned}$$

so dass wir im ganzen bekommen:

$$6\, v_\varkappa^2 w_\varkappa k_x = \tfrac{1}{3} v_\pi^3 \cdot v_x + 2 v_x' - 2 v_\sigma w_\sigma \cdot v_x + 2 v_x^* + w_x \cdot v_\sigma^2 + 2 v_\sigma w_\sigma \cdot v_x.$$

Wegen (20a) kommt:

$$6\, v_\varkappa^2 w_\varkappa k_x = \tfrac{1}{3} v_\pi^3 \cdot v_x + 2 v_x' + w_x v_\sigma^2 + 2 (v_x' - (\varrho\, \varrho'\, t)\, v_\varrho r_{\varrho'} r_x') \qquad (20\,b)$$

und setzt man den aus (20b) sich ergebenden Ausdruck für $\Delta_{v\,w}(v_\varkappa^3 k_\varkappa)$ in 20 ein, so kommt:

$$\begin{aligned} v_x' = \tfrac{1}{18} v_\pi^3 \cdot v_x + \tfrac{2}{3} v_x' + \tfrac{1}{6} w_x \cdot v_\sigma^2 - \tfrac{1}{3} (\varrho\, \varrho'\, t)\, v_\varrho r_{\sigma'} r_x' \\ + \tfrac{2}{3} (\varrho\, \varrho'\, t)\, v_\varrho r_{\varrho'} r_x', \qquad (20\,c) \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3} v_x' = \tfrac{1}{18} v_\pi^3 \cdot v_x + \tfrac{1}{6} w_x \cdot v_\sigma^2 + \tfrac{1}{3} (\varrho\, \varrho'\, t)\, v_\varrho r_{\varrho'} r_x'.$$

Der Ausdruck $(\varrho\, \varrho'\, t)\, v_\varrho r_{\varrho'} r_x'$ ergibt reduciert:

$$\tfrac{1}{2} \Delta_{xt} \cdot (\varrho\, \varrho'\, x)\, r_x' v_\varrho v_{\varrho'} + \tfrac{1}{2} (r'\, \widehat{\varrho\, \varrho'}\, \widehat{x t})\, v_\varrho r_{\varrho'}.$$

Das erste Glied verschwindet; das zweite liefert

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} (\varrho'\, x\, t)\, v_\varrho r_{\varrho'} r_\varrho' &= -\tfrac{1}{2} (\sigma\, x\, t)\, v_\sigma = -\tfrac{1}{2} (\sigma\, x\, \widehat{v w})\, v_\sigma \\ &= -\tfrac{1}{2} v_\sigma^2 \cdot w_x + \tfrac{1}{2} v_\sigma w_\sigma \cdot v_x. \end{aligned}$$

Dies in (20c) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} v_x' &= \tfrac{1}{18} v_\pi^3 \cdot v_x + \tfrac{1}{6} v_\sigma w_\sigma \cdot v_x, \\ v_x' &= v_x (\tfrac{1}{2} v_\sigma w_\sigma + \tfrac{1}{6} v_\pi^3). \end{aligned} \qquad (20\,d)$$

Der fragliche Beweis ist damit erbracht. Wir werden nur noch die Form

$$v_\sigma w_\sigma = v_\varrho^2 v_\sigma r_\sigma$$

auf v_π^3 zu reducieren haben.

Zunächst folgt aus der schon mehrfach benützten Identität

$$\begin{aligned} (\varrho\, \varrho'\, x)\, r_{\varrho'} v_\varrho r_x' &\equiv 0, \\ (\varrho\, \varrho'\, x)\, r_{\varrho'} v_\varrho r_y' + (\varrho\, \varrho'\, y)\, r_{\varrho'} v_\varrho r_x' &\equiv 0, \end{aligned}$$

wenn man $x = \varrho''$, $y = (r''\, v)$ setzt und mit $v_{\varrho''}$ multipliciert:

$$\begin{aligned} (\varrho\, \varrho'\, \varrho'')\, r_{\varrho'} v_\varrho (r'\, r''\, v)\, v_\varrho'' &= -(\varrho\, \varrho'\, \widehat{r' v})\, r_{\varrho'} v_\varrho r_{\varrho''}' v_{\varrho''} \\ \tfrac{1}{2} (\varrho\, \varrho'\, \varrho'')\, v_\varrho v_{\varrho''} ((r'\, r''\, v)\, r_{\varrho'} - (r'\, r\, v)\, r_{\varrho'}'') \\ = -v_\varrho v_{\varrho'} v_{\varrho''} r_{\varrho'} r_{\varrho''}' r_\varrho'' + v_\varrho^2 v_{\varrho''} r_{\varrho'}'' r_{\varrho''}' r_{\varrho'} \\ \tfrac{1}{2} (\varrho\, \varrho'\, \varrho'')\, (r\, r'\, r'')\, v_\varrho v_{\varrho'} v_{\varrho''} + v_\varrho v_{\varrho'} v_{\varrho''} r_{\varrho'} r_{\varrho''}' r_\varrho'' = v_\varrho^2 v_\sigma r_\sigma. \end{aligned}$$

Von den links stehenden Gliedern ist das erste nach Def. $\frac{1}{2} v_\pi^3$, das andere lässt sich auch auf r_π^3 zurückführen: denn da

$$(r\,r'\,r'')\,(\varrho\,\varrho'\,\varrho'') = \begin{vmatrix} 0 & r_{\varrho'} & r_{\varrho''} \\ r'_\varrho & 0 & r'_{\varrho''} \\ r''_\varrho & r''_{\varrho'} & 0 \end{vmatrix} = r_{\varrho'}\,r'_{\varrho''}\,r''_\varrho + r_{\varrho''}\,r'_\varrho\,r''_{\varrho'},$$

so ist:

$$v_\pi^3 = v_\varrho\,v_{\varrho'}\,v_{\varrho''}\,(\varrho\,\varrho'\,\varrho'')\,(r\,r'\,r'')$$

$$= v_\varrho\,v_{\varrho'}\,v_{\varrho''}\,(r_{\varrho'}\,r'_{\varrho''}\,r''_\varrho + r_{\varrho''}\,r'_\varrho\,r''_{\varrho'}) = 2\,v_\varrho\,v_{\varrho'}\,v_{\varrho''}\,r_{\varrho'}\,r'_{\varrho''}\,r''_\varrho.$$

Es ergibt sich demnach

$$v_\varrho^2\,r_\sigma\,v_\sigma = v_\pi^3 \tag{21}$$

und

$$v'_x = v_\varrho^2\,v_{\varrho'}^2\,r_{\varrho''}\,r'_{\varrho''}\,r''_x = v_x\,(\tfrac{1}{2}\,v_\pi^3 + \tfrac{1}{6}\,v_\pi^3) = \tfrac{2}{3}\,v_\pi^3 \cdot v_x = D \cdot v_x. \tag{22}$$

Die Ableitung der Gleichung (22) ist sehr wichtig; nicht sowohl wegen des auch durch geometrische Ueberlegungen ja leicht zu erbringenden Beweises, dass eben die Verwandtschaft zwischen v_x und $v_\varrho^2\,r_x$ involutorisch ist, als vielmehr deswegen, weil sie nur, abgesehen von den allgemeinen Identitäten der Symbolik, auf den 2 Identitäten beruht:

$$u_\varrho\,r_\varrho = 0; \quad (\varrho\,\varrho'\,x)\,r_{\varrho'}\,u_\varrho\,r'_x = 0.$$

Wir können also alle in Betracht kommenden Rechnungen in Symbolen r, ϱ ausführen, ohne auf die spezielle Gestalt $u_\eta\,x_\vartheta\ (\eta\ \vartheta\ x)$ von $u_\varrho^2\,r_x$ rekurrieren zu müssen; denn, wie eben gezeigt, genügen obige 2 Identitäten, um den Konnex $u_\varrho^2\,r_x = 0$ als einen solchen zu charakterisieren, bei dem die Verwandtschaft zwischen $r_x = 0$ und $r_\varrho^2\,r_x = 0$ umkehrbar eindeutig und involutorisch ist. Bei einer solchen quadratischen rationalen Verwandtschaft müssen stets 3 Fundamentallinien auftreten, für welche die Verwandtschaft unbestimmt ist.

Durch Einführung dieses Dreiecks als Koordinatendreiecks lässt sich die quadratische Transformation darstellen durch

$$\begin{aligned} \sigma\,u_i' &= \frac{1}{u_i} \qquad i = 1, 2, 3. \\ \sigma\,u_x' &= \frac{x_1}{u_1} + \frac{x_2}{u_2} + \frac{x_3}{u_3}. \end{aligned} \tag{23}$$

Auf die Gestalt der rechten Seite von (23) kann aber auch der Konnex $u_\eta u_\vartheta (\eta\, \vartheta\, x) = 0$ gebracht werden, wenn man „$\mathfrak{P}$“ als Koordinatendreieck einführt und den Einheitspunkt geeignet bestimmt. Und da die Schaar (η, ϑ) durch die obige Zwischenform vollständig definiert ist, so ist dadurch folgender, auch für die allgemeine Theorie des Konnexes (1, 2) wichtige Satz erwiesen:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $u_\varrho^2 r_x = 0$ eine rationale quadratische Transformation von u darstellt, also $u_\varrho^2 r_x$ eine Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} x_3 \right|$ ist, besteht in den 2 Identitäten:

$$u_\varrho r_\varrho = 0,\ (\varrho\, \varrho'\, x)\, r_{\varrho'}\, u_\varrho = 0.“$$

II. Teil.

§ 4.

Nachdem wir in den letzten zwei Paragraphen die wesentlichsten Eigenschaften der Form $u_v^2 r_x$ untersuchten, auf welche uns die Bedingung, dass 4 Punkte von S in einer Ebene liegen, im ersten Paragraph führte, können wir daran gehen, die gewonnenen Resultate für unsere Fläche zu verwerten. Wir werden in diesem Abschnitt uns hauptsächlich mit den Fragen beschäftigen, deren Beantwortung eben auf die Form $u_v^2 r_x$ führt, quaternäre Variable also nur gewissermassen aushilfsweise verwenden.

Wir haben auf S ein Parametersystem, das alle Punkte durch die Verhältnisse von 3 homogenen Parametern bestimmt, x_1, x_2, x_3. Eine Gleichung $f_{(x)} = f_x'' = 0$ zwischen diesen Parametern bestimmt eine Kurve auf S. Wir werden wissen wollen, welches die Charakteristiken dieser Kurve sind. Dazu müssen wir wissen, welcher Art die Koordinatenkurven sind, d. h. welche Kurven durch lineare Gleichungen in den x dargestellt werden.

Nun ist die Gleichung des Punktes x gegeben durch

$$U_A a_x^2 = 0.$$

Die Kurve $v_x = 0$ ist durch 2 Punkte y, z bestimmt, und jeder Punkt x auf ihr ist gegeben durch $y + \lambda z$; die Gleichung eines solchen Punktes von v ist

$$U_A a_{(y+\lambda z)}^2 \equiv U_A a_y^2 + 2\lambda U_A a_y a_z + \lambda^2 U_A a_z^2 = 0. \quad (24)$$

Wenn λ variiert, so erhalten wir alle Punkte von v; diese liegen, wie (24) zeigt, auf einem Kegelschnitt; durch

jede lineare Gleichung $v_x = 0$ ist also auf S ein Kegelschnitt gegeben. Es gibt daher auf S ∞^2 Kegelschnitte, durch jeden Punkt gehen unendlich viele.[1])

Allgemein stellt eine Gleichung $f_x^n = 0$ eine Kurve vom Grad $2n$ vor. Denn diese Kurve schneidet eine beliebige Ebene V in den Punkten, die sie mit der Schnittkurve von V mit S, also mit $V_A a_x^2 = 0$ gemeinsam hat, und das sind nach algebraischen Sätzen eben $2n$.

Durch 2 unendlich benachbarte Punkte y, $y + dy$ von f kann man einen Kegelschnitt legen, der die Gleichung $f_y^{n-1} f_x = 0$ hat; denn sei $f_y^{n-1} f_x = v_x$, so ist, wenn y auf f liegt, $v_y = 0$; ferner ist $y + dy$ dadurch bestimmt, dass es auf f liegt, dass also $f(y + dy) = 0$; dies liefert

$$f_{y+dy}^n = 0, \text{ oder } f_y^n + n f_y^{n-1} f dy = 0,$$

d. h.
$$f_y^{n-1} f dy = 0.$$

Es ist also auch $v_{y+dy} = 0$; v_x geht also wirklich durch die 2 benachbarten Punkte y, $y + dy$ und ist dadurch eindeutig bestimmt (vorausgesetzt, dass $f_y^{n-1} f_x$ nicht identisch Null).

Berühren sich in y 2 Kurven $f_x^n = 0$, $g_x^n = 0$, so muss der berührende Kegelschnitt beiden gemeinsam sein, also

$$f_y^{n-1} f_x = \sigma g_y^{n-1} g_x.$$

Suchen wir zum Beispiel diejenigen Punkte, in denen eine Ebene durch den Schnitt von V und W eine Kurve $f_x^n = 0$ berührt, so muss nach vorigem gelten

$$f_y^{n-1} f_x = \sigma (V_A a_y a_x + \lambda W_A a_y a_x). \tag{25}$$

Eliminiert man σ und $\sigma \cdot \lambda$ aus den 3 Gleichungen, die man aus (25) für 3 beliebige Werte von x bekommt, so erhält man eine Kurve

$$V_A W_{A'} a_y a'_y f_y^{n-1}(a a' f) - \tfrac{1}{2}(A A' X Y) a_y a'_y f_y^{n-1}(a a' f) = 0$$

[1]) s. für das folgende insbes.: Clebsch „Ueber die Steiner'sche Fläche", Crelle's Journal Bd. 63.

vom Grad $n+1$ in y, welche durch alle solche Berührpunkte hindurchgeht. Indem man die Doppelpunkte und Spitzen von f in der geeigneten Multiplicität berücksichtigt, sieht man also, dass der „Rang“ von f:

$$R = n(n+1) - 2d - 3r.$$

Das Geschlecht von f ist dasselbe, wie das der Kurve $f_x^n = 0$ in einer beliebigen Ebene, in der x ein Punkt ist. Damit sind dann alle Charakteristiken der Raumkurve f bestimmt. So folgt ohne weiteres, dass $V_A a_x^3 = 0$ eine Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht Null, also mit 3 Doppelpunkten ist.

§ 5.

Bewegen wir uns auf S, so werden wir eine solche ebene Schnittkurve, überhaupt eine Ebene, durch 3 Punkte x, y, z auf ihr bestimmen. Nach (8), S. 5, ist die Gleichung dieser Ebene:

$$2(x\,y\,z)\,M_X\,m_x\,m_y\,m_z - N_X(x\,y\,v)(y\,z\,v)(z\,y\,v) = 0,$$

wo $M_X m_x^3$ und $N_X u_v^3$ durch (7) definiert sind.

Lassen wir die 3 Punkte x, y, z in x zusammenfallen, so erhalten wir die Tangentialebene in x, gegeben durch

$$M_X m_x^3 = 0.$$

Lassen wir dagegen die Punkte x, y, z auf einen Kegelschnitt c rücken, so wird die Ebene, welche c enthält, gegeben durch

$$N_X v_v^3 = 0.$$

Die Tangentialebene in x schneidet die Kurve aus:

$$M_A m_x^3 a_t^3 \equiv \tfrac{1}{2} M_A m_x (m\,a\,\widehat{x\,t})^2 \equiv \tfrac{1}{2} (\varrho\,x\,t)^2 r_x = 0$$

(nach (10) und (12)). Die Ebene von v schneidet (s. (12)!) in der Kurve

$$N_A v_v^3 a_t^2 \quad \cdot v_t \cdot v_\varrho^2 r_t = 0$$

also, ausser in $v_t = 0$ im Kegelschnitt $v_\varrho^2 r_t = 0$.

Der Schnitt der Tangentialebene x, $(\varrho\, x\, t)^2\, r_x = 0$, hat in x einen Doppelpunkt, muss also nach den bekannten Sätzen über Kurven 2. Grads (resp. 4. Grads) zerfallen, so dass

$$(\varrho\, x\, t)^2\, r_x = v_t \cdot v'_t.$$

v und v' bestimmen sich durch Auflösung einer quadratischen Gleichung. Nach „Cl.-L." I. S. 104 sind, wenn $a_x^2 = 0$ einen zerfallenden Kegelschnitt darstellt, die 2 Geraden w, w' desselben gegeben durch

$$\begin{aligned} w_1 : w_2 : w_3 &= a_{11} : a_{12} + \sqrt{-A_{33}} : a_{13} - \sqrt{-A_{22}} \\ &= a_{21} - \sqrt{-A_{33}} : a_{22} : a_{23} + \sqrt{-A_{11}} \\ &= a_{31} - \sqrt{-A_{22}} : a_{32} + \sqrt{-A_{11}} : a_{33}. \end{aligned}$$

Analog für w' mit entgegengesetztem Vorzeichen der Wurzeln.

Hier ist:

$$a_{ik} = (\varrho\, x)_i\, (\varrho\, x)_k\, r_x;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\varrho\, x)_2^2\, r_x, & (\varrho\, x)_2\, (\varrho\, x)_3\, r_x \\ (\varrho' x)_2\, (\varrho' x)_3\, r'_x, & (\varrho'\, x)_3^2\, r'_x \end{vmatrix}$$

$$= (\varrho\, x)_2\, (\varrho'\, x)_3\, r_x\, r'_x\, (\widehat{\varrho\, x}\ \widehat{\varrho'\, x}\, \bar{v})$$

$$(\text{wo } v_1 = 1\ \bar{v}_2 = 0\ \bar{v}_3 = 0)$$

$$= (\varrho\, x)_2\, (\varrho'\, x)_3\, r_x\, r'_x\, (\varrho\, \varrho'\, x)\, \bar{v}_x = \tfrac{1}{2}\, (\varrho\, \varrho'\, x)^2\, r_x\, r'_x \cdot x_1^2 = \tfrac{1}{2}\, h_x^4 \cdot x_1^2.$$

Es folgt also in unserm Fall:

$$w_1 : w_2 : w_3 = (\varrho\, x)_1^2\, r_x : (\varrho\, x)_1\, (\varrho\, x)_2\, r_x$$

$$+ \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4 \cdot x_3} : (\varrho\, x)_1\, (\varrho\, x)_3\, r_x - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4 \cdot x_2}$$

$$\begin{aligned} w_t &= (\varrho\, x)_1\, r_x\, (\varrho\, x\, t) - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\, (x\, t)_1} \\ &= (\varrho\, x)_2\, r_x\, (\varrho\, x\, t) - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\, (x\, t)_2} \\ &= (\varrho\, x)_3\, r_x\, (\varrho\, x\, t) - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\, (x\, t)_3} \\ w'_t &= (\varrho\, x)_1\, r_x\, (\varrho\, x\, t) + \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\, (x\, t)_1} \\ &= \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \\ &= \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—}. \end{aligned}$$

Führt man einen willkürlichen Punkt z ein, so kann man schliesslich auch schreiben:

$$\begin{aligned} v_t &= (\varrho\, x\, z)\,(\varrho\, x\, t)\, r_x + \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\,(x\, z\, t)} = 0 \\ v_t' &= (\varrho\, x\, z)\,(\varrho\, x\, t)\, r_x - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_x^4\,(x\, z\, t)} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Man sieht: es existiert auf S eine Kurve $h_x^4 = 0$, für welche die 2 Kegelschnitte, welche die Tangentialebene in einem ihrer Punkte ausschneidet, zusammenfallen. Sie scheidet die Fläche in 2 Teile, in denjenigen, in dem h_x^4 positiv ist, wo jene 2 Kegelschnitte imaginär sind, und in den, wo h_x^4 negativ ist, wo die Tangentialebene in reellen Kegelschnitten schneidet: der erstere ist der elliptische, der zweite der hyperbolische Teil von S.

Die 2 Kegelschnitte $v_x = 0$ und $v_\varrho^2\, r_x = 0$ werden wir, gemäss der in § 2 eingeführten Bezeichnung als beigeordnet bezeichnen. Beider Schnittpunkt, der Hauptpunkt eines jeden, ist der Berührpunkt der sie enthaltenden Tangentialebene von S.

§ 6.

Nehmen wir 2 Punkte, y, z auf S, so ist durch dieselben ein Büschel von Ebenen bestimmt, welche die Verbindungsgerade $y — z$ enthalten. Die Ebenen haben die 4 Schnittpunkte dieser Geraden mit S alle gemeinsam; wir fragen nach den 2 andern Schnittpunkten dieser Geraden. Wir werden dieselben zweckmässig bestimmen als die den Schnittkurven von 2 beliebigen Ebenen durch jene Gerade [ausser y und z] gemeinsamen Punkte.

Als die eine solche Ebene nehmen wir die des Kegelschnitts durch y und z; diese Ebene schneidet im $(y\, z\, x) = 0$; $(\varrho\, y\, z)^2\, r_x = 0$, die 2 freien Schnittpunkte müssen also zunächst auf $v_x' \equiv (\varrho\, y\, z)^2\, r_x = 0$ liegen.

Die benützte Ebene ist Tangentialebene durch y und z, so zwar, dass beide Punkte auf demselben Kegelschnitte liegen. Es wird noch Tangentialebenen — wie wir sehen werden,

zwei, — geben, so dass y und z auf getrennten Kegelschnitten liegen; letztere sind, nach Definition, stets beigeordnet; geht daher der eine, w, durch y, so muss der andere, w', der Bedingung genügen: $w'^2_\varrho r_y = 0$; er soll ausserdem durch z gehen, ist also einer der 2 durch

$$(\varrho\, z\, x)^2 r_y = 0$$

gegebenen Kegelschnitte. Deren beigeordnete gehen durch y und genügen offenbar ihrerseits der Gleichung $w^2_\varrho r_z = 0$ und sind gegeben durch

$$(\varrho\, y\, x)^2 r_z = 0.$$

Setzen wir $(y\, z) = v$, so ergibt sich die Gleichung der 2 weitern Schnittpunkte der Geraden durch y und z, indem wir aus $v'_x = 0$; $(\varrho\, z\, x)^2 r_y = 0$; $u_x = 0$ x eliminieren, zu:

$$(\widehat{\varrho\, z\, v'\, u})^2 r_y = 0;$$

$$(v'_\varrho u_z - v'_z \cdot u_\varrho)^2 r_y = 0;$$

$$v'^2_\varrho r_y \cdot u_z^2 - 2\, v'_\varrho u_\varrho r_y \cdot u_z \cdot v'_z + v'^2_z \cdot u^2_\varrho r_y = 0.$$

$$D \cdot v_y \cdot u_z^2 - 2\, v'_\varrho u_\varrho r_y \cdot u_z \cdot v'_z + u^2_\varrho r_y \cdot v'^2_z = 0.$$

oder:

$$- 2 \cdot v'_\varrho u_\varrho r_y \cdot u_z + u^2_\varrho r_y \cdot v'_z = 0.$$

Ist $v'_z = 0$, so erhält man eine Gerade $(y) - (z)$, welche in der Tangentialebene von z liegt, welche also in z S tangiert. Als Schnittpunkte kommen:

$$u_z = 0;\ v'_\varrho u_\varrho r_y = 0.$$

Also: die Gleichung des 4. Schnittpunkts der Tangente durch y, welche in z S berührt, ist:

$$v'_\varrho u_\varrho r_y = 0,$$

$$(v'_x = v'^2_\varrho r_x,\ v_i = (y\, z)_i).$$

Dies gilt natürlich auch noch, wenn $y_i = (v\, v')_i$; man bekommt dann den 4. Schnittpunkt der Haupttangente in y, welche v berührt.

Für den allgemeinen Fall wollen wir die Zerfällung der 2 durch y und z gehenden auf S. 23 erwähnten Kegelschnittpaare vornehmen, um die weiteren Schnittpunkte der Geraden $(y) - (z)$ mit S u. s. w. analytisch darzustellen. Vorweg bemerken wir, dass dabei unter der Quadratwurzel die Ausdrücke

$$p_y^2 q_z^2 = (\varrho\, \varrho'\, y)^2\, r_z\, r'_z$$

und

$$p_z^2 q_y^2 = (\varrho\, \varrho'\, z)^2\, r_y\, r'_y$$

auftreten. Die Differenz der genannten Ausdrücke gibt:

$$\begin{aligned} &\Delta_{yz}\,[(\varrho\, \varrho'\, y)\, r_y\, (\varrho\, \varrho'\, r'\, y\, z)] \\ &= \Delta_{yz}\,[(\varrho\, \varrho'\, y)\, r_y\, (\varrho'\, y\, z)\, r'_\varrho] = 0. \end{aligned} \qquad \text{(S. 18)}$$

Also

$$p_y^2 q_z^2 = p_z^2 q_y^2.$$

Die einzelnen Kegelschnitte werden dann:

durch y: $w_1 = (\varrho\, y\, z)\,(\varrho\, y\, x)\, r_z + \sqrt{-\tfrac{1}{2} p_y^2 q_z^2} \cdot (y\, z\, x)$

$$w_2 = (\varrho\, y\, z)\,(\varrho\, y\, x)\, r_z - \sqrt{-\tfrac{1}{2} p_y^2 q_z^2} \cdot (y\, z\, x)$$

durch z: $w_1^* = (\varrho\, z\, y)\,(\varrho\, z\, x)\, r_y + \sqrt{-\tfrac{1}{2} p_y^2 q_z^2} \cdot (z\, y\, x) = w'_2$

$$w_2^* = (\varrho\, z\, y)\,(\varrho\, z\, x)\, r_y - \sqrt{-\tfrac{1}{2} p_y^2 q_z^2} \cdot (z\, y\, x) = w'_1.$$

Es fragt sich bloss, welche Kegelschnitte als beigeordnete zusammengehören. Der Schnittpunkt von 2 beigeordneten Kegelschnitten ist Berührpunkt der sie enthaltenden Ebene; der Schnitt von 2 nicht beigeordneten, also von w_1 mit w'_2, und von w_2 mit w'_1 ist dagegen ein Schnittpunkt der Geraden $(y) - (z)$ mit S, liegt daher auch auf $(\varrho\, y\, z)^2\, r_x = 0$. Es muss daher $\mu\, w_1 + \lambda\, w'_2 = (\varrho\, y\, z)^2\, r_x$, und ebenso $\mu'\, w_2 + \lambda'\, w'_1 = (\varrho\, y\, z)^2\, r_x$ sein. Man findet, indem man w_1 mit w_1^* oder w_2^* kombiniert: ($: Q = \sqrt{-\tfrac{1}{2} p_y^2 q_z^2}$:)

$$\begin{aligned} &(\varrho\, y\, z)\,(\varrho\, y\, x)\, r_z + Q \cdot (y\, z\, x) + \lambda \cdot [(\varrho\, z\, y)\,(\varrho\, z\, x)\, r_y + Q \cdot (z\, y\, x)] \\ &= (\varrho\, y\, z)\,(\varrho\, y\, x)\, r_z + \lambda\,(\varrho\, z\, y)\,(\varrho\, z\, x)\, r_y + Q \cdot [(y\, z\, x) \pm \lambda\,(z\, y\, x)]. \end{aligned}$$

Offenbar geben die 2 ersten Glieder für $\lambda = +1$:

$$(\varrho\, y\, z)\,[(\varrho\, y\, x)\, r_z - (\varrho\, z\, x)\, r_y] = (\varrho\, y\, z)^2\, r_x,$$

es muss also für $\lambda = 1$ der zweite Teil verschwinden, d. h. es muss das obere Zeichen gelten, es sind w_1 und $w_2^* = w_1'$, w_2 und $w_1^* = w_2'$ beigeordnete Kegelschnitte.

Es sind also:

Der Schnitt von w_1 mit $w_1'\,[u_{t_1}]$ } die 2 Berührpunkte der
w_2 „ $w_2'\,[u_{t_2}]$ } Tang.-Ebenen durch $(y)-(z)$

w_1 „ $w_2'\,[u_{p_1}]$ } die 2 weiteren Schnittp.
w_2 „ $w_1'\,[u_{p_2}]$ } von $(y)-(z)$ mit S.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{p_1} = (w_1\, w_2'\, u) &= v_\varrho\, v_{\varrho'}\, r_z\, r_y'\, (\varrho\, \widehat{y}\, \varrho'\, \widehat{z}\, u) + Q \cdot \{v_\varrho\, (\varrho\, \widehat{y}\, v\, u)\, r_z \\ &\qquad + v_\varrho\, (\widehat{v}\, \varrho\, z\, u)\, r_y\} \\ &= v_\varrho\, v_{\varrho'}\, u_{\varrho'}\, r_y'\, r_z \cdot (\varrho\, y\, z) - v_\varrho\, v_{\varrho'}\, r_y'\, r_z\, (\varrho\, y\, \varrho')\, u_z \\ &\qquad + Q \cdot v_\varrho^2\, (r\, v\, u) \\ &= v_\varrho^2\, r_z \cdot v_{\varrho'}\, u_{\varrho'}\, r_y' - \tfrac{1}{2}\, (\varrho\, \varrho'\, y)\, (r\, r'\, v)\, v_\varrho\, v_{\varrho'} \cdot u_z \\ &\qquad + Q \cdot v_\varrho^2\, (r\, v\, u). \end{aligned}$$

Durch leichte Rechnung führt man diesen Ausdruck auf folgenden zurück (s. S. 12 f.):

$$u_{p_1} = \tfrac{1}{8}\, \Delta_{vu}\, \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y]^2 - \tfrac{1}{2}\, \Delta_{yz}\, (v_k^2\, k_y\, u_y) + Q \cdot v_\varrho^2\, (r\, v\, u).$$

Analog (27)

$$u_{p_2} = \tfrac{1}{8}\, \Delta_{vu}\, \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y]^2 - \tfrac{1}{2}\, \Delta_{yz}\, (v_k^2\, k_y \cdot u_y) - Q \cdot v_\varrho^2\, (r\, v\, u).$$

Ferner:

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= \tfrac{1}{8}\, \Delta_{vu}\, \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y]^2 - \tfrac{1}{2}\, \Delta_{yz}\, (v_k^2\, k_y \cdot u_y) - Q \cdot \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y \cdot u_y] \\ u_{t_2} &= \tfrac{1}{8}\, \Delta_{vu}\, \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y]^2 - \tfrac{1}{2}\, \Delta_{yz}\, (v_k^2\, k_y \cdot u_y) + Q \cdot \Delta_{yz}\, [v_\varrho^2\, r_y \cdot u_y]. \end{aligned} \qquad (28)$$

Unter der Wurzel kommt der Ausdruck vor:

$$p_y^2\, q_z^2 = (\varrho\, \varrho'\, y)^2\, r_z\, r_z'.$$

Derselbe lässt sich auf die Formen $h_y^2\, h_z^2$ und $(\sigma\, y\, z)^2$ reducieren; denn die Formen des reducierten Systems bestehen aus

$$(\varrho\, \varrho'\, y)^2\, r_y\, r'_y = h_y^4;\ (\varrho\, \varrho'\, y)\, \{(\widehat{\varrho\, \varrho'\, r'\, v})\, r_y + (\widehat{\varrho\, \varrho'\, r\, v})\, r'_y\}$$

$$= (\varrho\, \varrho'\, y)\, (r'_\varrho\, v_{\varrho'}\, r_y - r_{\varrho'}\, v_\varrho\, r'_y) = 2\, (\varrho\, \varrho'\, y)\, r'_\varrho\, v_{\varrho'}\, r_y \equiv 0 \quad \text{(S. 13)}$$

$$(\varrho\, \varrho', r'\, v)\, (\varrho\, \varrho', r\, v) = -\, v_\varrho\, v_{\varrho'}\, r'_\varrho\, r_{\varrho'} = -\, v_\sigma^2;$$

man findet:

$$p_y^2\, q_z^2 = (\varrho\, \varrho'\, y)^2\, r_z\, r'_z = h_y^2\, h_z^2 - \tfrac{1}{3}\, (\sigma\, y\, z)^2. \qquad (29)$$

Man sieht: ist $Q = 0$, so fallen sowohl die 2 durch $(y) - (z)$ gehenden Tangentialebenen, als auch die 2 weiteren Schnittpunkte von $(y) - (z)$ mit S zusammen. $(y) - (z)$ ist also Tangente; also: „Die Bedingung, dass y und z auf einer Tangente von S liegen, ist:

$$(\varrho\, \varrho'\, y)^2\, r_z\, r'_z = p_y^2\, q_z^2 = 0, \text{ oder: } h_y^2\, h_z^2 - \tfrac{1}{3}\, (\sigma\, y\, z)^2 = 0.“$$

Man kann dies auch so formulieren:

„Zieht man von y aus alle möglichen Tangenten, so schneiden dieselben (ausser in ihren Berührpunkten) S in der Kurve:

$$(\varrho\, \varrho'\, x)^2\, r_y\, r'_y = 0,$$

welche also als Umhüllungsgebilde von Kegelschnitten durch

$$u_\varrho^2\, r_y = 0\ \ (C_{(y)})$$

dargestellt wird.“

Lässt man z auf v nach y rücken, so erhalten wir im Grenzfall für $(y) - (z)$ die Tangente in y, welche den durch y gehenden Kegelschnitt c berührt. Es ergeben sich in diesem speziellen Fall:

$$u_{p_{1,2}} = \tfrac{1}{4}\, \Delta_{vu} \cdot [v_\varrho^2\, r_y]^2 - v_k^3\, k_y \cdot u_y \pm Q' \cdot v_\varrho^2\, (rvu)$$

$$u_{t_{1,2}} = \tfrac{1}{4}\, \Delta_{vu}\, [v_\varrho^2\, r_y]^2 - v_k^3\, k_y \cdot u_y \mp 2\, Q'\, v_\varrho^2\, r_y \cdot u_y$$

$$Q' = \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, h_y^4}.$$

Die 2 andern Schnittpunkte der Tangente in y mit S fallen also nur dann zusammen, wenn $h_y^4 = 0$.

Es können also nur in den Punkten der Kurve $h_x^4 = 0$ Doppeltangenten möglich sein.

Ferner: ist $v_\varrho^2 r_y = 0$; so ist, da auch $v_y = 0$, $v_\varrho^2 (rvu) = \varepsilon \cdot u_y$, es reduciert sich dann $u_{t_1} = u_{t_2}$ auf u_y; es fallen also alle 3 Tangentialebenen durch diese Tangente in eine zusammen, die Tangente ist Haupttangente.

„Die Haupttangenten in einem Punkt y von S sind diejenigen Tangenten, welche die 2 Kegelschnitte der Tangentialebene in y berühren."

Dies ist auch deshalb klar, weil ja stets die Haupttangenten die Tangenten an die Schnittkurve der Tangentialebene in jenem Punkt sind, wo ja die Schnittkurve einen Doppelpunkt haben muss.

Das unendlich kleine gerade Element, das eine Haupttangente mit S gemeinsam hat, ist also dasselbe wie das Element des berührenden Kegelschnitts in dessen „Hauptpunkt". Die Frage nach den Haupttangenten- oder Asymptotenkurven ist also identisch mit der nach den Hauptkoincidenzkurven des Connexes $u_\varrho^2 r_x = 0$.

Dieselben sind die Integralkurven der Differentialgleichung:

$$u_\varrho^2 (rvdu) = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann leicht integriert werden, wenn man für $u_\varrho^2 r_x$ die spezielle Form $u_\eta u_\vartheta (\eta \vartheta x)$ einführt, wobei sich als Integralkurven ergeben:[1])

$$u_\eta^2 + \lambda \cdot u_\vartheta^2 = 0,$$

in Punktkoordinaten

$$(\eta \eta' x)^2 + 2\lambda (\eta \vartheta x)^2 + \lambda^2 (\vartheta \vartheta' x)^2 = 0$$

abgekürzt: $$e_x^2 + 2\lambda f_x^2 + \lambda^2 g_x^2 = 0.$$

[1]) Die Integration wurde zuerst geleistet von Clebsch, Crelle's Journal, Bd. 63. Diesen Fall siehe Clebsch-Lindemann, Bd. I, S. 965.

In Tangentialkoordinaten ist die Gleichung der Asymptotenkurve, welche den Kegelschnitt v berührt:

$$u_\varrho \, v_\varrho \, (ruv) = 0.$$

Singuläre Lösungen der Differentialgleichung der Asymtotenkurven erhalten wir durch die Werte u, für welche $u_\varrho^2 \, (ruv) = 0$. Dies ist der Fall für die 4 Kegelschnitte, welche von allen Haupttangenten berührt werden, für welche (s. S. 10) u (der im Berührpunkt berührte Kegelschnitt) mit dem beigeordneten Kegelschnitt zusammenfällt. Diese 4 Kegelschnitte stellen zusammen eine Kurve 8. Grads dar, welche gegeben wird durch $h_x^4 = 0$. Sollen nämlich die 2 durch x gehenden Kegelschnitte in der Tangentialebene x zusammenfallen, so fallen auch die 2 Haupttangenten in x zusammen, und dafür ist eben die Bedingung $h_x^4 = 0$. Dass dies aber die 4 Kegelschnitte des Vierseits $\mathfrak{V}$ darstellt, erkennt man durch Rechnung in der speziellen Form von $u_\varrho^2 \, r_x$ und durch geometrische Ueberlegung.

Eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $u_\varrho^2 \, (rudu) = 0$ erhalten wir aber auch durch diejenigen Kegelschnitte v, für welche $v_\varrho^2 \, r_x \quad 0$, welche mit ∞^1 andern Kegelschnitten durch einen bestimmten Punkt auf einer Ebene liegen: das sind die 3 Kegelschnitte, welche die Doppelkurve von S darstellen und das Dreikant $\mathfrak{P}$ bilden (S. 10).

§ 7.

Schon manche Erörterungen des letzten Paragraphen, in welchem wir die Probleme besprachen, die sich darbieten, wenn man die durch 2 Punkte von S bestimmten Geraden betrachtet, führen uns darauf, nunmehr einen einzigen Punkt auf S zu nehmen, und das System aller durch ihn gehenden Tangenten und Tangentialebenen zu studieren.

Nach § 5 ist die Tangentialebene in x durch die Gleichung bestimmt:

$$(A \, A' \, A'' \, X) \, a_x \, a'_x \, a''_x \, (a \, a' \, a'') = 0, \text{ oder: } M_X \, m_x^3 = 0.$$

Gibt man X, so wird durch $M_X\, m_x^3 = 0$ auf S eine Kurve als Ort der Berührungspunkte aller durch X gehenden Tangentialebenen bestimmt. Bei allgemeiner Lage von X ist dies eine Raumkurve 6. Ordnung vom Geschlecht 1.

Ist X speziell ein Punkt y der Fläche,

$$U_X \equiv U_A\, a_y^2,$$

so wird $$M_X\, m_x^3 \equiv M_A\, m_x^3\, a_y^2 = \tfrac{1}{2}\,(\varrho\, x\, y)^2\, r_x.$$

Die Berührungskurve hat dann in y einen Doppelpunkt, in dem die 2 Haupttangenten berühren.

Alle diese Kurven gehen durch 6 feste Punkte hindurch, die 6 Punkte, in denen sich die singulären 4 Kegelschnitte berühren, auf den 6 Kanten des Tetraeders der singulären 4 Kegelschnitte. Durch diese 6 Kanten gehen daher unendlich viele Tangentialebenen an S.[1])

Wir betrachten alle durch einen Punkt y von S gehenden Kegelschnitte. Es seien v_x und v_x' die 2 von der Tangentialebene y ausgeschnittenen Kegelschnitte. Dann hat ein beliebiger Kegelschnitt durch y die Gleichung:

$$w_x = v_x + \lambda\, v_x' = 0.$$

Dessen beigeordneter:

$$w_x' \equiv w_\varrho^2\, r_x \equiv v_\varrho^2\, r_x + 2\,\lambda\, v_\varrho\, v_\varrho'\, r_x + \lambda^2\, v_\varrho'^2\, r_x \qquad (32)$$

$$\equiv v_x' + 2\,\lambda\, v_x'' + \lambda^2 \cdot D \cdot v_x = 0, \qquad (32\,a)$$

da nach (22) $\quad v_\varrho'^2\, r_x = \tfrac{2}{3}\, v_\pi^3 \cdot v_x = D \cdot v_x$;

ferner haben wir

$$v_\varrho\, v_\varrho'\, r_x = v_\varrho^2\, r_{\varrho'}\, v_{\varrho'}\, r_x' = v_K^3\, k_x \qquad v_x''$$

gesetzt.

Der Kegelschnitt w (oder λ) schneidet seinen beigeordneten in dem Punkt:

$$(v\, v'\, u) + 2\,\lambda\,(v v''u) + 2\,\lambda^2\,(v' v'' u) + \lambda^3\, D\,(v'\, v\, u) = 0.$$

[1]) s. Sturm, Mathem. Annalen 3.

Wir definieren:

$$(v\,v'\,u) = u_y; \quad (v'\,v''\,u) = u_t; \quad (v''\,v\,u) = u_{t'}.$$

Der Hauptpunkt von λ oder der Berührpunkt der Tangentialebene λ ist dann:

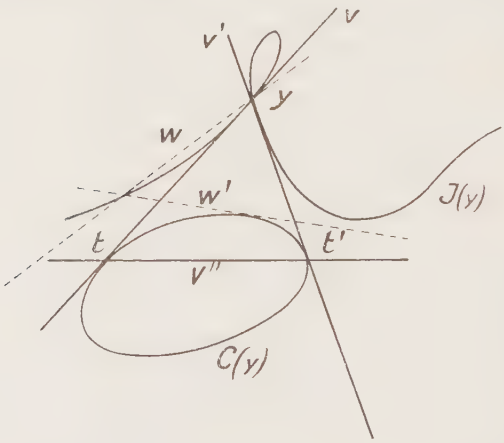
$$u_y - 2\,\lambda\,u_t + 2\,\lambda^2\,u_{t'} - \lambda^3 \cdot D \cdot u_y = 0. \tag{33}$$

Um die gegenseitige Lage von v, v', v'', y, t, t' u. s. w. übersehen zu können, bedienen wir uns der Abbildung von S auf die Bildebene E, wodurch dann die untenbezeichnete Konfiguration entsteht. Wir bemerken noch: wie wir schon S. 10 sahen, umhüllt w'_x die Kurve $C_{(y)}$: $u^2_\varrho\, r_y = 0$, welche also in (32 a) in Parameterform gegeben ist. Diese zeigt dann, dass $v_\varrho\, v'_\varrho\, r_x \quad v''_x = 0$ Berührungssehne ist für die Berührpunkte von v_x und v'_x an $C_{(y)}$.

Nach S. (23) ist der 4. Schnittpunkt der Tangente λ durch y:

$$w'_\varrho\, u_\varrho\, r_y = 0$$

$$v'_\varrho\, u_\varrho\, r_y + 2\,\lambda\, v''_\varrho\, u_\varrho\, r_y + \lambda^2\, D \quad v_\varrho\, u_\varrho\, r_y = 0. \tag{34}$$



Es ist der Berührpunkt von w' mit $C_{(y)}$. Die Punkte

$$v'_\varrho\, u_\varrho\, r_y, \quad v_\varrho\, u_\varrho\, r_y, \quad v''_\varrho\, u_\varrho\, r_y$$

lassen sich leicht mit

$$u_{t'}, \quad u_t, \quad u_y$$

identificieren, wie die geometrische Anschauung lehrt. Es handelt sich also nur um die Reduktionsfaktoren. Es sei:

$$v'_\varrho u_\varrho r_y = \varkappa \cdot u_{t'} = \varkappa \cdot (u\, v'\, v'')$$

$$v_\varrho u_\varrho r_y = \lambda \cdot u_t = \lambda \cdot (u\, v''\, v).$$

Also: $v'_\varrho v_\varrho r_y = v''_y = \varkappa v_{t'} = \varkappa (v\, v'\, v'') = \lambda v'_t = \lambda (v'\, v''\, v).$

Da $u_y = (v\, v'\, u)$, so ist also:

$$v''_y = (v\, v'\, v'') = \varkappa (v\, v'\, v'') = \lambda (v'\, v''\, v),$$

woraus sich ergibt:

$$\varkappa = 1, \quad \lambda = 1.$$

$$v_\varrho u_\varrho r_y = + u_t; \quad v'_\varrho u_\varrho r_y = + u_{t'}.$$

Wir setzen: $v''_\varrho u_\varrho r_y = M \cdot u_y$, da über die Berechtigung dieser Annahme kein Zweifel bestehen kann. (34) gibt dann:

$$u_{t'} + 2\lambda \cdot M \cdot u_y + \lambda^2 D \cdot u_t = 0; \qquad (34\text{ a})$$

es muss nun stets die Bedingung erfüllt sein, dass dieser Punkt mit $w'_x(\lambda)$ vereinigt ist, was analytisch verlangt, dass stets

$$w'_{t'} + 2\lambda M w'_y + \lambda^2 D w'_t = 0,$$

oder (s. 32 a):

$$\lambda^2 D v'_t + 4\lambda^2 M v''_y + \lambda^2 D v_{t'} = 0.$$

Nun ist:

$$v_{t'} = (v\, v'\, v''); \; v'_t = (v\, v'\, v''); \; v''_y = (v''\, v\, v'),$$

also:
$$M = -\frac{D}{2}.$$

Die Gleichung des 4. Schnittpunkts der Tangente λ erscheint demnach definitiv in der Form:

$$\frac{1}{D} u_{t'} - \lambda u_y + \lambda^2 u_t = 0. \qquad (34\text{ b})$$

Es ist auch hieraus ersichtlich, dass man für $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ die 2 Punkte $u_{t'}$ und u_t bekommt, wodurch dieselben auch für S sehr einfach definiert sind, als die 4. Schnittpunkte der Haupttangenten in y.

Aus der in (33) gegebenen Parameterdarstellung des Tangentialkegels — wo jede Tangentialebene durch ihren Berührpunkt gegeben ist — lassen sich noch einige Folgerungen ziehen.[1])

Dio „Geometrie auf diesem Tangentialkegel" gründet sich auf das Studium der Form

$$\Delta_\lambda^3 = D\,\lambda^3 - 1.$$

Für uns ist von geometrisch einfacherer Bedeutung als die Form Δ_λ^3 deren kubische Kovariante, die in unserer speziellen Darstellung ist:

$$-D \cdot Q_\lambda^3, \text{ wo } Q_\lambda^3 = D\,\lambda^3 + 1.$$

Sind λ, μ, ν 3 bel. „Tangentialebenen", so ist nämlich

$$Q_{\lambda\mu\nu} = D\,\lambda\,\mu\,\nu + 1 = 0$$

die Bedingung dafür, dass diese 3 Tangentialebenen λ, μ, ν durch eine Gerade gehen, ein „Tripel" bilden. Den Beweis führen wir so:

Eine andere Kurve i_x^3 schneidet (33) in 9 Punkten, deren Parameter durch eine Gleichung 9. Grads bestimmt sind:

$$i_y^3 - 6\,\lambda\,i_y^2\,i_t + \ldots\ldots\ldots - \lambda^9\,D^3\,i_y^3 = 0.$$

Sind $\lambda^{(i)}$, $i = 1, 2 \ldots 9$, die 9 Wurzelwerte, so ist ersichtlich:

$$\prod_{i=1}^{i=9} \lambda^{(i)} = \frac{1}{D^3}$$

Sei nun $i_x^3 = M_Z\,m_x^3$, so haben i_x^3 und (33) die Eckpunkte des Vierseits $\mathfrak{V}$ gemeinsam. Seien diese 6 Punkte

[1]) Vergl. zum folgenden Rosenow, über rationale Kurven dritter Ordnung. Inaug.-Diss. Breslau 1873.

auf (33) gegeben durch $\lambda^{(4)}, \ldots \lambda^{(9)}$, $\prod_{i=4}^{i=9} \lambda^{(i)} = A$, so gilt für die freien 3 Punkte:

$$\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)} = \frac{1}{A\,D^3}.$$

Die 6 Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ bilden nun zusammen:

3 Punkte $\lambda^{(4)}$, $\lambda^{(5)}$, $\lambda^{(6)}$ in einer Seite des Vierseits,

3 „ $\lambda^{(7)}$, $\lambda^{(8)}$, $\lambda^{(9)}$, eines Dreiecks, welches nach Rosenow (eine einfache Rechnung bestätigt es) ein „Tripeldreieck“ ist, so dass die Relationen gelten:

$$\lambda^{(4)}\,\lambda^{(5)}\,\lambda^{(6)} = \frac{1}{D}, \qquad \lambda^{(7)}\,\lambda^{(8)}\,\lambda^{(9)} = -\frac{1}{D},$$

also $A = -\frac{1}{D^2}$, und:

$$\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)} = -\frac{1}{D},$$

d. h. „$D\,\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)} + 1 = 0$

ist die Bedingung dafür, dass die Ebenen $\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)}$ 2 Tangentialkegeln angehören, d. h. durch eine Gerade gehen.“

„Durch $D\,\lambda^2\,\mu + 1 = 0$ ist also einer Tangentialebene λ diejenige $-\mu-$ zugeordnet, welche man durch die Tangente λ noch an S legen kann.“ Dieselbe Tangentialebene μ entspricht der Tangentialebene $-\lambda$, also auch:

„Durch $\lambda + \lambda' = 0$ sind sich 2 „konjugierte“ Tangentialebenen zugeordnet, welche die Eigenschaft haben, dass ihre Tangenten wieder auf einer Tangentialebene liegen.“

Durch $D\,\lambda^3 + 1 = 0$ sind 3 Tangentialebenen bestimmt, welche die Eigenschaft haben, dass sich in der betr. Tangente 3 konsekutive Tangentialebenen schneiden:

„Durch $D\,\lambda^3 + 1 = 0$ sind die 3 ausserhalb y berührenden Haupttangenten durch y bestimmt.“

Sei $\varepsilon = \sqrt[3]{-\frac{1}{D}}$ eine der 3 möglichen Wurzeln der vorigen Gleichung, so ist die Gleichung des betr. Berührpunktes, da $1 - \lambda^3 D = 1 + \frac{D}{D} = 2$:

$$u_y - \varepsilon u_t + \varepsilon^2 u_l = 0,$$

oder

$$\varepsilon u_y - \varepsilon^2 u_l + \varepsilon^3 u_{t'} = 0,$$

$$-\frac{1}{D} u_{t'} + \varepsilon u_y - \varepsilon^2 u_t = 0,$$

$$\frac{1}{D} u_{t'} - \varepsilon u_y + \varepsilon^2 u_t = 0,$$

d. h. diese Punkte liegen auch auf der Kurve $C_{(y)}$ (34 b) und zwar sind sie Berührungspunkte von $C_{(y)}$ mit $J_{(y)}$, wie man durch weitere Rechnung und auch geometrische Ueberlegung findet.

Die so bestimmten Haupttangenten sind die Rückkehrkanten des Tangentialkegels durch y. Die zugehörigen Tangentialebenen, die Rückkehrebenen, schneiden den Tangentialkegel in je noch einer Tangente; die so erhaltenen Tangenten sind durch $D\lambda^3 - 1 = 0$ bestimmt; die Berührpunkte liegen auf v_x''.

Neben den 2 durch die Tangentialebene in y ausgeschnittenen Kegelschnitten $v_x = 0$, $v_x' = 0$ ist also von besonderem Interesse der Kegelschnitt $v_\varrho v_\varrho' r_x - v_x'' = 0$, welcher die 2 „Haupttangentennebenpunkte" von y, wie wir die 4. Schnittpunkte der Haupttangenten in y nennen wollen, verbindet. Es ist klar, dass v_x'' auch analytisch sich so darstellen lassen wird, dass nur y in der Definitionsformel auftritt.

Da $v_x \cdot v_x' = \tau \cdot (\varrho\, x\, y)^2 r_y$, so ist in der That:

$$r_\varrho v_\varrho' r_x = \tau (\varrho\, \varrho'\, y)^2 r_y r_x'.$$

Nun ist:

$$4 h_y^3 h_x = 2 (\varrho\, \varrho'\, y)^2 r_y r_x' + 2 (\varrho\, \varrho'\, x)(\varrho\, \varrho'\, y) r_y r_y'$$
$$= 4 (\varrho\, \varrho'\, y)^2 r_y r_x'.$$

da $(\varrho\,\varrho'\,y)^2\,r_y\,r'_x - (\varrho\,\varrho'\,x)\,(\varrho\,\varrho'\,y)\,r_y\,r'_y = (\varrho\,\varrho'\,y)\,r_y \cdot [(\varrho\,\varrho'\,y)\,r'_x$

$$- (\varrho\,\varrho'\,x)\,r'_y] = (\varrho\,\varrho'\,y)\,r_y\,(\varrho\,x\,y)\,r'_\varrho \equiv 0. \qquad \text{(S. 18)}$$

$$v''_\varrho = \tau\,v_\varrho\,v'_\varrho\,r_x = \tau\,h_y^3\,h_x. \qquad (35)$$

Man sieht zugleich: der Ort aller Punkte x, deren Haupttangentennebenpunkte mit z auf einem Kegelschnitte liegen, ist die Kurve:

$$h_z\,h_x^3 = 0.$$

Diese Kurve geht durch die 6 Eckpunkte von $\mathfrak{V}$, ist also die Berührungskurve eines Tangentialkegels.

§ 8.

Von singulären Kurven von S haben wir bis jetzt nur die durch $h_x^4 = 0$ gegebene parabolische Kurve kennen gelernt, die aus 4 singulären Kegelschnitten besteht, längs welcher S von den 4 Ebenen dieser Kegelschnitte doppelt berührt wird. Wir gehen etwas näher auf die andern Singularitäten ein.

Bei den Betrachtungen des § 7 über den von einem Punkt von S ausgehenden Tangentialkegel setzten wir voraus, dass, wenn y dieser Punkt, $C_{(y)} \equiv u_\varrho^2\,r_y = 0$ nicht zerfalle. Das Zerfallen von $C_{(y)}$ bedingt die Singularitäten von S. Besteht $u_\varrho^2\,r_y = 0$ aus 2 Punkten, so muss, wenn v der durch sie gehende Kegelschnitt ist, sein:

$$\varrho_i\,v_\varrho\,r_y = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (36)$$

Durch Elimination der v ergibt sich [1])

$$p_x^3 \equiv (\varrho\,\varrho'\,\varrho'')^2\,r_x\,r'_x\,r''_x = 0 \qquad (37)$$

als die Kurve, auf der dann y liegen muss; durch Elimination der y:

$$u_\pi^3 \equiv (\varrho\,\varrho'\,\varrho'')\,(r\,r'\,r'')\,u_\varrho\,u_{\varrho'}\,u_{\varrho''} = 0 \qquad (38)$$

[1]) Dieses sind die Kurven P und H des allgemeinen Konnexes bei „Godt"; dagegen die Form I bei Godt wird sich als mit P identisch erweisen (im Gegensatz zum allgemeinen Konnex).

als die Kurve, welche v berühren muss. Beide Kurven sind vermöge (36) eindeutig auf einander bezogen.

Die Punkte, in die $u_\varrho^2 r_y = 0$ zerfällt, erfüllen die Kurve:

$$(\varrho\,\varrho'\,x)(\varrho'\,\varrho''\,x)(\varrho\,\varrho''\,x)(r\,r'\,r'') = 0, \qquad (39)$$

wie aus den Betrachtungen über die Kombinanten von Kegelschnitt-Netzen und -Geweben folgt: (39) ist ja nichts anderes als die Hermite'sche Kurve des Gewebes

$$\varkappa_1 \cdot r_1\, u_\varrho^2 + \varkappa_2 \cdot r_2\, u_\varrho^2 + \varkappa_3 \cdot r_3\, u_\varrho^2 = 0$$

in der Bildebene E.

Durch symbolische Rechnung erweist sich aber die linke Seite von (39) als identisch mit $-2\,p_x^3$.

Ferner erkennen wir, dass auch die Kegelschnitte v, für welche

$$v_\varrho^2\, r_x \equiv 0$$

der Gleichung

$$v_\tau^3 = 0$$

genügen müssen.

Von S. 11 her wissen wir, dass, wenn $v_\varrho^2\, r_x \equiv 0$, v eine Seite des Polardreiecks $\mathfrak{P}$ ist, welches in E allen Kegelschnitten der Schaar (η, ϑ) gemeinsam ist. Und aus der Theorie des Kegelschnittpaares ist bekannt, dass 2 Kegelschnitte η, ϑ also auch deren Schaar (η, ϑ) nur je 1 Kovariante 3. Ordnung und 3. Klasse besitzen, nämlich die, welche Null gesetzt, die 3 Seiten und die 3 Ecken des Polardreiecks $\mathfrak{P}$ darstellen. Es stellt demnach [die Reduktion auf Symbole η, ϑ bestätigt es]

$$\left.\begin{array}{l} p_x^3 = 0 \text{ die 3 Seiten von } \mathfrak{P} \\ u_\pi^3 = 0 \text{ die 3 Ecken von } \mathfrak{P} \end{array}\right\} \text{ in } E$$

dar.

Da $v_\varrho^2\, r_x \equiv 0$, wenn v_x einer der linearen Faktoren von p_x^3, so liegt v mit jedem Punkt von S auf einer Ebene, bezw. mit unendlich vielen „beigeordneten“ Kegelschnitten in einer

Ebene. Das kann nur so sein, dass v in eine doppelt zählende Gerade von S zerfällt, daher:

„Durch $p_x^3 = 0$ sind die 3 Doppelgeraden auf S gegeben."

„Durch $u_\pi^3 = 0$ sind die 3 Parameter des dreifachen Punktes von S gegeben."

Um die Eigenschaften dieser Doppelgeraden näher zu studieren, empfiehlt sich die Einführung spezieller ternärer Koordinaten,[1]) die der Einführung von $\mathfrak{P}$ als Koordinatendreieck in E entspricht.

Die Schaar (η, ϑ) wird dann konstituiert durch 2 Kurven, deren Gleichungen etwa folgende seien:

$$u_\eta^2 \equiv \mu_1 u_1^2 + \mu_2 u_2^2 + \mu_3 u_3^2 = 0$$
$$u_\vartheta^2 \equiv \nu_1 u_1^2 + \nu_2 u_2^2 + \nu_3 u_3^2 = 0.$$

Die Fundamentalkombinante nimmt die Form an:

$$u_\varrho^2 r_x \equiv p_1 x_1 u_2 u_3 + p_2 x_2 u_1 u_3 + p_3 x_3 u_1 u_2 = 0,$$

wo

$$\sigma p_1 = \mu_2 \nu_3 - \mu_3 \nu_2, \quad \sigma p_2 = \mu_3 \nu_1 - \mu_1 \nu_3, \quad \sigma p_3 = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1.$$

Wir bestimmen den Einheitspunkt so, dass

$$\sigma p_1 = \sigma p_2 = \sigma p_3 = 1,$$

was stets möglich, dann wird:

$$u_\varrho^2 r_x \equiv x_1 u_2 u_3 + x_2 u_1 u_3 + x_3 u_1 u_2 = 0. \qquad (40)$$

In der Schaar (η, ϑ) kommen 3 zerfallende Kurven vor mit den Gleichungen:

$$u_1^2 - u_2^2 = 0; \quad u_2^2 - u_3^2 = 0; \quad u_3^2 - u_1^2 = 0.$$

Die 4 Seiten von Q, welche alle Individuen der Schaar berühren, sind:

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$$

für die Zeichenkombinationen: $+\,+$; $+\,-$; $-\,+$; $-\,-$.

[1]) Spezielle Koordinaten siehe auch bei Clebsch, Crelle's Journ. 67.

Liegt nun y auf einer Seite von $\mathfrak{P}$, ist also etwa $y_1 = 0$, so wird $u_\varrho^2 r_y$:

$$u_1 \cdot (y_2 u_3 + y_3 u_2),$$

d. h. $C_{(y)}$ zerfällt in die Gegenecke und den Punkt auf $x_1 = 0$ mit den Koordinaten z_i:

$$\sigma z_1 = 0; \quad \sigma z_2 = y_3; \quad \sigma z_3 = y_2.$$

Demnach liefert $(\varrho x y)^2 r_y$:

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot (y_2 \cdot x_1 y_2 - y_3 \cdot x_1 y_3)$$
$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot x_1 \cdot [y_2^2 - y_3^2],$$

d. h. $(\varrho x y)^2 r_y = 0$ zerfällt dann in die Verbindungslinie mit der Gegenecke und dieselbe Seite, ist aber identisch Null, wenn $y_2^2 - y_3^2 = 0$, also y ein Punkt einer zerfallenden Kurve der Schaar (η, ϑ) ist.

Ferner wird $(\varrho x y)^2 r_x$:

$$- x_1^3 y_3 y_2 + x_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot x_1 y_2 - x_3 \cdot (x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot x_1 y_3$$

oder $$x_1 \cdot [(x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_2 y_2 - x_3 y_3) - x_1^2 y_2 y_3],$$

d. h. J_y zerfällt in dieselbe $\mathfrak{P}$-Seite und einen Kegelschnitt, durch den Punkt y, sowie den Punkt z, der mit y zusammen $u_\varrho^2 r_y = 0$ bildet (s. o.).

Für die Fläche ausgesprochen lauten die gefundenen Resultate und die einiger anderen Rechnungen: Ist y ein Punkt einer Doppelgeraden, so besteht der Schnitt der Tangentialebene in y aus der betr. Doppelgeraden und dem durch y und den dreifachen Punkt gehenden Kegelschnitt. Von den 2 Haupttangenten fällt die eine in die Doppelgerade, die andere ist Tangente an den Restkegelschnitt in y. Der Nebenpunkt dieser Haupttangente ist der Punkt u_z auf derselben Doppelgeraden; dies ist nur so denkbar, dass die Punkte y und z auf S im selben Punkt der Doppelgeraden vereinigt liegen. In der That ist der von z ausgehende Tangentialkegel identisch mit dem von y ausgehenden. Also:

Die 2 in einem Punkt einer Doppelgeraden vereinigten Punkte sind jeweils:

$$y_1 = 0;\ y_2;\ y_3;\ \sigma z_1 = 0;\ \sigma z_2 = y_3;\ \sigma z_3 = y_2$$

und analog auf den 2 andern Doppelgeraden.

Die Kegelschnitte aber, welche y und z mit dem dreifachen Punkt verbinden, sind i. A. verschieden:

$$y_2 x_3 - y_3 x_2 = 0;\quad z_2 x_3 - z_3 x_2 = 0 \equiv y_2 x_2 - y_3 x_3 = 0.$$

Sie fallen nur zusammen, wenn

$$y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

Dadurch sind auf jeder Doppelgeraden 2 ausgezeichnete Punkte bestimmt: es sind solche, in denen sich die 2 Mäntel berühren, die sich in der betr. Doppelgeraden durchdringen, sie sind daher Kuspidalpunkte von S.[1]) In diesen Kuspidalkurven berühren sich je 2 singuläre Kegelschnitte von S. [Die 6 Haupttangenten in den 6 Kuspidalpunkten bilden wie Cremona, Crelle 62 zeigt, ein Tetraeder.]

§ 9.

Ist c_x^2 ein ebener Schnitt von S, so muss sein:

$$c_\eta^2 = 0,\ c_\upsilon^2 = 0,$$

also, wenn wir u_η^2, u_υ^2 in der Gestalt des vorigen Paragraphen annehmen:

$$\mu_1 c_{11} + \mu_2 c_{22} + \mu_3 c_{33} = 0$$

$$\nu_1 c_{11} + \nu_2 c_{22} + \nu_3 c_{33} = 0,$$

also: $$c_{11} : c_{22} : c_{33} = p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 1 : 1$$

bei unserer speziellen Wahl des Einheitspunktes; c_x^2 ist also von der Form:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \gamma_1 x_2 x_3 + \gamma_2 x_1 x_3 + \gamma_3 x_1 x_2 = 0.^2)$$

[1]) s. Cremona, Crelle's Journal 62, Sturm, Mathem. Annalen Bd. 3 u. s. w.

[2]) Diese Darstellung insbes. bei Clebsch, Crelle's Journal Bd. 67.

Die Schnittpunkte mit einer Doppelgeraden $x_1 = 0$ sind bestimmt durch:

$$x_1 = 0; \quad x_2^2 + x_3^2 + \gamma_1 x_2 x_3 = 0.$$

Das ist die Form einer quadratischen Involution, deren Doppelpunkte durch die Gleichung gegeben sind:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Das stimmt mit unsern Resultaten im vorigen Paragraphen überein.

Eine zweite Involution bilden auf einer Doppelgeraden die Schnittpunkte mit den Asymptotenlinien. Eine solche hat in Punktkoordinaten die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{\mu_1 + \lambda \nu_1} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \lambda \nu_2} + \frac{x_3^2}{\mu_3 + \lambda \nu_3} = 0,$$

so dass die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$ gegeben sind durch:

$$x_2^2 \cdot (\mu_3 + \lambda \nu_3) + x_3^2 (\mu_2 + \lambda \nu_2) = 0,$$

$$(\mu_3 x_2^2 + \mu_2 x_3^2) + \lambda (\nu_3 x_2^2 + \nu_2 x_3^2) = 0.$$

Die Doppelpunkte dieser Involution sind gegeben durch:

$$x_2 \cdot x_3 = 0,$$

sind also die 2 auf dieser Doppelgeraden im 3 fachen Punkt vereinigten Punkte. Diese Involution hat mit der vorigen ein Punktepaar gemeinsam, das durch die Funktionaldeterminante der Doppelpunkte gegeben wird:

$$\begin{vmatrix} x_2 & -x_3 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Ein solches Punktepaar gibt 2 vereinigte Punkte auf den 2 Mänteln durch die 1. Doppelgerade, durch die eine Asymptotenlinie geht; dieselbe hat also dann dort einen Doppelpunkt. Demnach:

Es gibt 3 Asymptotenlinien, welche auf je einer Doppelgeraden einen Doppelpunkt haben; dieselben sind:

$$2\,x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$
$$-x_1^2 + 2\,x_2^2 - x_3^2 = 0$$
$$-x_1^2 - x_2^2 + 2\,x_3^2 = 0.$$

Es gibt eine Kurve, welche durch die 3 Doppelpunkte dieser 3 Asymptotenlinien so hindurchgeht, dass sie in jedem dieselben Tangenten hat:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Wir sehen, dass dies ein ebener Schnitt ist; also:

Die 6 Doppelpunktstangenten der 3 Asymptotenlinien mit Doppelpunkten liegen in einer Ebene und sind zugleich Tangenten in den Doppelpunkten des ebenen Schnittes

$$s_x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{41}$$

Daraus schliessen wir, dass bei dieser Kurve 4. Ordnung in den Doppelpunkten zugleich Wendepunkte sind (Cremona, Crelle 62).

Wie wir auf S. 39 sehen, ist jeder ebene Schnitt von der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \gamma_1\,x_2\,x_3 + \gamma_2\,x_1\,x_3 + \gamma_3\,x_1\,x_2 = 0.$$

Die Parameter-Darstellung von S kann demnach gegeben werden durch:

$$U_1\,x_2\,x_3 + U_2\,x_1\,x_3 + U_3\,x_1\,x_2 + U_4\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

Das Koordinatentetraeder besteht dann aus den 3 Doppelgeraden und der Ebene von $s_x^2 = 0$.

Nehmen wir eine Fläche 2. Grads, $A_X^2 = 0$, so schneidet dieselbe S in einer Kurve 8. Ordnung, welche auf jeder Doppelgeraden 2 Doppelpunkte hat. Die Parameter des Schnitts mit der Kante $X_2 = 0\ X_3 = 0$ sind bestimmt durch

$$A_{11}\,x_2^2\,x_3^2 + 2\,A_{14}\,x_2\,x_3 \cdot (x_2^2 + x_3^2) + A_{44}\,(x_2^2 + x_3^2)^2 = 0. \tag{42}$$

Der Schnitt bildet sich ab in eine Kurve:

$$a_x^4 = 0,$$

welche ihrerseits die Doppelgerade $x_1 = 0$ schneidet in den Punkten, welche gegeben sind durch:

$$a_{2222}\, x_2^4 + 4\, a_{2223}\, x_2^3 x_3 + 6\, a_{2233}\, x_2^2 x_3^2 + 4\, a_{2333}\, x_2 x_3^3 + a_{3333}\, x_3^4 = 0.$$

Man sieht, dass dass die Relationen gelten:

$$\begin{aligned} a_{2222} - a_{2333} &= 0 \\ a_{2223} - a_{2333} &= 0 \end{aligned} \qquad (43)$$

und 4 analoge für die Indicis 1, 2, ; 1, 3.

Man hätte auch eine Relation für die Punkte selbst aufstellen können: schreibt man $\frac{x_2}{x_3} = x$, und x^0, x', x'', x''' für die 4 Nullpunkte von (42), so gilt:

$$x^0 \cdot x' \cdot x'' \cdot x''' = 1,$$

$$x^0 + x' + x'' + x''' = \frac{1}{x^0} + \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''}.$$

Gibt man daher — wie geometrisch auch klar ist — 2 Punkte auf jeder Doppelgeraden, die nicht vereinigt liegen, so sind die 2 andern bestimmt. Nimmt man etwa x'', x''' als gegeben an, so kommt durch Rechnung

$$x^0 = \frac{1}{x''}, \quad x' = \frac{1}{x'''}$$

oder

$$x^0 = \frac{1}{x'''}, \quad x' = \frac{1}{x''}.$$

Es sind x^0, x' die zu x'', x''' in der ersten Involution (mit den Doppelpunkten $u_2^2 - u_3^2 = 0$ u. s. w.) konjugierten Punkte.

Ist umgekehrt in E eine Kurve $a_x^4 = 0$ gegeben und gefragt, wann dieselbe den Schnitt einer F_2 mit S darstelle, so kann man die 6 (nur für 5 zählenden) Bedingungen bei allgemeiner Koordinatenwahl so aussprechen:

Ist $u^2_{\varphi(i)} = 0$ das Punktepaar von Kuspidalpunkten auf der Doppelgeraden p_i, so muss $a^2_{\varphi(i)}\, a^2_x = 0$ durch die Punkte von $u^2_{\varphi(i)} = 0$ gehen, für $i = 1, 2, 3$.

Auf diesem Wege kann man auch die Bedingungen ableiten, unter denen eine Kurve $a^{2n}_x = 0$ den Schnitt von S mit einer F_n darstellt.

Wir können aber auch eine Kurve $a^2_x = 0$ geben und eine andere $b^2_x = 0$ so bestimmen, dass sie mit ersterer den Durchschnitt von S mit einer F_2 bildet.

Der Schnitt von $a^2_x = 0$ mit $x_3 = 0$ gibt das Punktepaar, das durch

$$a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12} + x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 0$$

bestimmt ist. Die in Bezug auf $u_1^2 - u_2^2 = 0$ konjugierten Punkte sind gegeben durch

$$a_{22}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{11}\, x_2^2 = 0.$$

Analog auf den andern 2 $\mathfrak{P}$-Seiten. Die 3 Punktepaare liegen auf der Kurve:

$$a_{22}\, a_{33}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, a_{33}\, x_1\, x_2 + a_{11}\, a_{33}\, x_2^2 + 2\, a_{13}\, a_{22}\, x_1\, x_3$$
$$+ 2\, a_{23}\, a_{11}\, x_2\, x_3 + a_{11}\, a_{22}\, x_3^2 = 0,$$

oder in Tangentialkoordinaten: wo $A_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2$ u. s. w.:

$$A_{11}\, a_{11}^2\, u_1^2 + 2\, A_{12}\, a_{11}\, a_{22}\, u_1\, u_2 + \cdots A_{33}\, a_{33}^2\, u_3^2 = 0,$$

oder $$\sum A_{ik}\, a_{ii}\, a_{kk}\, u_i\, u_k = 0,$$

oder $$\sum A_{ik}\, u_{\alpha(i)}\, u_{\alpha(k)} = 0,$$

wo $$u_{\alpha(i)} = a_{ii}\, u_i.$$

Nehmen wir speziell eine Asymptotenlinie, so ist:

$$a^2_x = \frac{x_1^2}{\mu_1 + \lambda\, \nu_1} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \lambda\, \nu_2} + \frac{x_3^2}{\mu_3 + \lambda\, \nu_3}$$

$$\sum\sum A_{ik}\, v_i\, v_k = (\mu_1 + \lambda\, \nu_1)\, v_1^2 + (\mu_2 + \lambda\, \nu_2)\, v_2^2 + (\mu_3 + \lambda\, \nu_3)\, v_3^2$$

$$u_{\alpha(i)} = \frac{u_i}{\mu_i + \lambda \nu_i}$$

$$\sum\sum A_{ik}\, u_{\alpha(i)}\, u_{\alpha(k)} = \frac{u_1^2}{\mu_1 + \lambda \nu_1} + \frac{u_2^2}{\mu_3 + \lambda \nu_3} + \frac{u_3^2}{\mu_3 + \lambda \nu_3};$$

in Punktkoordinaten ist also die Gleichung dieser Kurve:

$$(\mu_1 + \lambda \nu_1) x_1^2 + (\mu_2 + \lambda \nu_2) x_2^2 + (\mu_3 + \lambda \nu_3) x_3^2 = 0$$

d. h.: die Kurve, welche die Asymptotenlinien zu Schnitten von F_2 ergänzen, bilden die reciproken Polaren der Asymptotenlinien in Bezug auf

$$u_o^2 \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \text{ bezw. } s_x^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

und gehen daher sämtlich durch 4 feste Punkte (Cremona, Ist. Lomb. 1867).

§ 10.

Manche Formen der letzten Paragraphen können in sehr einfacher Weise noch anders geschrieben werden. Da diese neue Schreibart vom prinzipiellen Standpunkt aus wichtig ist, soll sie hier kurz angeführt werden.

Die Schaar von Asymptotenlinien

$$\lambda_1 u_\eta^2 + \lambda_2 u_\vartheta^2 = 0$$

ist in ihrer Gesamtheit für S kovariant, gerade so wie das System der ebenen Schnitte. Wie wir nun letzteres durch eine quaternär-ternäre Form repräsentieren, durch $U_A a_x^2 = 0$, können wir die Schaar $\lambda_1 u_\eta^2 + \lambda_2 u_\vartheta^2$ durch eine binär-ternäre Form ersetzen, indem wir $u_\eta^2 = \mathfrak{a}_1 u_\alpha^2$, $u_\vartheta^2 = \mathfrak{a}_2 u_\alpha^2$,

$$\lambda_1 u_\eta^2 + \lambda_2 u_\vartheta^2 = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 u_\alpha^2 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 u_\alpha^2 = \mathfrak{a}_\lambda u_\alpha^2 \qquad (44)$$

einführen.

Dann ist aber nicht nur die Form (44) zu S kovariant, sondern auch ternäre Kovarianten von (44), d. h. insgesamt die Formen:

$$\mathfrak{a}_\lambda u_\alpha^2; \quad \mathfrak{a}_\lambda \mathfrak{a}'_\lambda (\alpha\, \alpha'\, x)^2 = \mathfrak{b}_\lambda^2 b_x^2; \quad \mathfrak{a}_\lambda \mathfrak{a}'_\lambda \mathfrak{a}''_\lambda (\alpha\, \alpha'\, \alpha'')^2 = \mathfrak{c}_\lambda^3. \quad (45)$$

Kombinanten der Schaar sind solche ternäre Bildungen, welche bei linearer Transformation des Parameters λ ungeändert bleiben, daher (unter anderm) die Invarianten in binärer Beziehung der 3 obigen Formen (45). Als „erweiterte Kombinanten“ wird man diejenigen Formen betrachten, welche die binären Variabeln noch enthalten, welche also, je nach Anzahl der binären Variabeln, einfach oder mehrfach unendliche Kurvensysteme in kovarianter Beziehung zu S geben.

Diese Untersuchung kann man insofern zu einem gewissen Abschluss bringen, als man das vollständige System der 3 binären Formen ersten, zweiten, dritten Grads angeben kann. Es besteht offenbar aus dem System der 2 Formen zweiten und dritten Grads und den Ueberschiebungen der so erhaltenen Formen mit der Form ersten Grads. Das volle System der Formen $\mathfrak{b}_\lambda^2$, $\mathfrak{c}_\lambda^3$ ist nun bekannt, es ist aufgezählt bei Clebsch, „binäre Formen“ S. 209, und besteht aus 15 Formen. Bildet man alle möglichen Ueberschiebungen dieser 15 Formen mit $\mathfrak{a}_\lambda$, so hat man das volle System der 3 Formen $\mathfrak{a}_\lambda$, $\mathfrak{b}_\lambda^2$, $\mathfrak{c}_\lambda^3$, wodurch wir binär-ternäre Gebilde, d. h. Kurvensysteme erhalten, die in ihrer Gesamtheit zu S kovariant sind, oder auch rein binäre oder rein ternäre Gebilde. Von den ersteren treten auf:

$$\mathfrak{c}_\lambda^3; \quad \Delta = \Delta_\lambda^3 = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}')^2\,\mathfrak{c}_\lambda\,\mathfrak{c}_\lambda'; \quad Q = Q_\lambda^3 = (\mathfrak{c}\,\Delta)\,\mathfrak{c}_\lambda^3\,\Delta_\lambda;$$

ausserdem die Invariante $R = (\Delta\,\Delta')^2$, von der man leicht beweisen kann, dass sie überhaupt die einzige Kombinant-Invariante der Schaar, also auch von $u_\varrho^2\,r_x$ ist, und zwar ist sie proportional zu $(\sigma\,\sigma'\,\sigma'')^2$, wo $u_\sigma^2 \equiv u_\varrho\,u_{\varrho'}\,r_\varrho'\,r_{\varrho'}$.

III. Teil.

§ 11.

Die Gleichung eines Punktes x von S ist nach Definition:

$$U_A a_x^2 = 0.$$

Stellen wir die Bedingung, dass dieser Punkt auf einer bestimmten Ebene V liege, so erhalten wir durch

$$V_A a_x^2 = 0$$

eine Kurve auf S, deren Punkte x auf der Ebene V liegen, d. h. die Schnittkurve von V mit S.

So schneidet jede Ebene des Raums in einer solchen Kurve, einer Kurve 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten in den Schnittpunkten von V mit den 3 Doppelgeraden von S.

In unserer Bildebene E bilden die Bilder dieser sämtlichen ebenen Schnitte das Fundamentalsystem dritter Stufe $K^{(3)}$ von Kegelschnitten, das auf die Ebenen des Raumes eindeutig abgebildet ist.

Aus demselben wird durch eine lineare Bedingung, die man den $K^{(3)}$-Kegelschnitten [Kegelschnitten des Systems $K^{(3)}$] auferlegt, ein Netz herausgehoben; also beispielsweise durch die Bedingung, einen Punkt x zu enthalten, oder allgemeiner, zu einer Kurve 2. Klasse konjugiert zu sein.

Dadurch erhalten wir aber auch für die den $K^{(3)}$-K.-Sch. zugeordneten Ebenen eine lineare Bedingung, wodurch aus den Ebenen des Raums eine 2fache Mannigfaltigkeit herausgehoben wird, die Gesamtheit der durch einen Raumpunkt gehenden Ebenen. Dieser Punkt hat die Gleichung

$$U_A a_\alpha^2 = 0, \tag{46}$$

wenn $u_\alpha^2 = 0$ die Klassenkurve ist, zu der die $K^{(3)}$-Kegelschnitte konjugiert sein sollen.

Damit ist jeder ebenen Kurve 2. Klasse (C_{II}) ein Raumpunkt eindeutig zugeordnet, aber nicht umgekehrt.

Nach Definition sind ja alle $K^{(3)}$-Kegelschnitte apolar zu $u_\eta^2 = 0$, $u_\vartheta^2 = 0$, d. h. es ist identisch:

$$U_A a_\eta^2 \equiv 0, \quad U_A a_\vartheta^2 \equiv 0. \tag{47}$$

Den C_{II} der Schaar (η, ϑ) entspricht sonach kein Raumpunkt.

Ferner geht daraus hervor: einer C_{II} $u_\alpha^2 + \lambda u_\eta^2 + \mu u_\vartheta^2 = 0$ ist der Punkt:

$$U_A a_\alpha^2 + \lambda U_A a_\eta^2 \, \mu \, U_A a_\vartheta^2 = 0$$

oder (wegen 47) $$U_A a_\alpha^2 = 0$$

zugeordnet, d. h. allen C_{II} des Gewebes

$$u_\alpha^2 + \lambda u_\eta^2 + \mu u_\vartheta^2 = 0$$

entspricht derselbe Raumpunkt.

Ist $u_\alpha^2 = 0$ speziell ein Punktepaar, $u_x \cdot u_y$, so bekommen wir den Punkt $P_{(xy)}$:

$$U_A a_x a_y = 0$$

als den räumlichen Repräsentanten dieses als C_{II} betrachteten Punktepaars.

Es ist uns nun möglich, anzugeben, in welcher Beziehung dieser Punkt $P_{(xy)}$ zu den Punkten x, y von S steht.

Betrachten wir einen Kegelschnitt auf S durch die Punkte x und y, so ist $u_x + \lambda u_y = 0$ ein beliebiger Punkt desselben, mit der Gleichung

$$U_A a_{(x+\lambda y)}^2 \equiv U_A a_x^2 + 2 \lambda U_A a_x a_y + \lambda^2 U_A a_y^2 = 0. \tag{48}$$

Es stellt dies bei variierenden λ die Parametergleichung des durch x und y gehenden Kegelschnittes dar. Aus der Form derselben entnehmen wir aber, dass $P_{(xy)}$ der Pol der

Verbindungslinie oder Berührungssehne $(x) - (y)$ ist. Von den Punkten x und y gelangen wir also auf folgende Weise zu $P_{(xy)}$: wir legen durch x und y den einzigen möglichen Kegelschnitt von S und ziehen die Tangente an denselben in x und y; beide schneiden sich dann in $P_{(xy)}$. Wir wollen diesen den „Polarpunkt zu x und y“ nennen. Seine Einführung als ein mit den Punkten auf S im engsten Zusammenhang stehendes Raumelement ist nicht nur vom algebraischen Standpunkt aus naheliegend, sondern erweist sich auch geometrisch als vorteilhaft, um andere Raumgebilde einfach und anschaulich zu definieren.

Geometrisch werden wir jetzt 4 harmonische Punkte $(x, y; x', y')$ als solche definieren, bei denen $P_{(xy)}$ mit (x') und (y') auf einer Geraden liegt, oder $P_{(x'y')}$ mit (x) und (y).

$$\lambda_1^2 U_A a_x^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 U_A a_x a_y + \lambda_2^2 U_A a_y^2 = 0$$

ist der Punkt, der ternär durch

$$\lambda_1 u_x + \lambda_2 u_y = 0$$

hergestellt ist. Alle Sätze über Punktsysteme auf einer Geraden gehen daher über in die analogen für Kegelschnitte.

Da durch das ganze Gewebe:

$$u_\alpha^2 + \lambda u_\eta^2 + \mu u_\vartheta^2 = 0$$

nur der eine Raumpunkt

$$U_A a_\alpha^2 = 0$$

repräsentiert wird, so ist also, wenn $u_z \cdot u_{z'}$ ein Punktepaar des Gewebes,

$$U_A a_z a_{z'} = 0$$

stets derselbe Punkt. Alle diese Punkte z, z' liegen auf der Kurve

$$(\varrho\, a\, x)^2 r_x = 0, \text{ oder } M_A m_x^3 a_\alpha^2 = 0$$

der Berührungskurve des Tangentialkegels vom Punkte $U_A a_\alpha^2 = 0$ an S und bilden auf ihr Paare „konjugierter Pole“.

Der 2 solche konjugierte Pole verbindende Kegelschnitt liegt also stets in einer Ebene durch die Spitze des Kegels (in § 7 wurde das gezeigt für den Fall, dass die Spitze auf S liegt).

Nehmen wir einen Punkt y, und die Punkte auf einen Kegelschnitt v durch z, z', so liegen die Polarpunkte $P_{(y.z\ +\ \lambda z')}$

$$U_A\, a_y\, a_z + \lambda\, U_A\, a_y\, a_{z'} = 0$$

auf der Geraden:

$$(A\, A'\, X\, Y)\, a_y\, a'_y\, (a\, a'\, v) = 0.$$

Bewegt sich auch y auf einem Kegelschnitt w von S durch y und y', so erhalten wir ∞' solche Gerade:

$$(A\, A'\, X\, Y)\, a_y\, a'_y\, (a\, a'\, v) + \mu\, (A\, A'\, X\, Y)\, (a_y\, a'_{y'} + a_{y'}\, a'_y)\, (a\, a'\, v)$$
$$+ \mu^2\, (A\, A'\, X\, Y)\, a_{y'}\, a'_{y'}\, (a\, a'\, v) = 0.$$

Diese bilden die eine Regelschaar einer Fläche zweiter Klasse: eine solche Gerade ist die Verbindungslinie der Punkte:

$$U_A\, a_y\, a_z + \mu\, U_A\, a_{y'}\, a_z = 0$$

$$U_A\, a_y\, a_{z'} + \mu\, U_A\, a_{y'}\, a_{z'} = 0.$$

Durch Elimination von μ findet sich

$$U_A\, U_{A'}\, (a_y\, a_z\, a'_{y'}\, a'_{z'} - a_{y'}\, a_z\, a'_y\, a'_{z'}) = 0$$

oder

$$U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, v)\, (a\, a'\, w) = 0$$

als Gleichung der von diesen Geraden beschriebenen Fläche.

Die zweite Regelschaar bilden natürlich die Geraden, welche Orte der Polarpunkte zu einem Punkt auf v und den Punkten von u sind.

§ 12.

Aus der Form $U_A\, a_x^2$ erhalten wir, wenn wir die sämtlichen Kovarianten eines Kegelschnittes aufstellen, die Formen:

$$U_A\, a_x^2, \quad U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, u)^2, \quad U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\, (a\, a'\, a'')^2.$$

Die beiden ersten haben wir im vorigen Paragraphen betrachtet. Die zweite stellt, Null gesetzt, bei gegebenem U die Gleichung des Schnittes von S mit U in „Linienkoordinaten“ dar, bei gegebenem u die Ebenengleichung des Kegelschnitts u. Die 3. Form endlich gibt, Null gesetzt, die Fläche, welche die Ebene U berühren muss, damit sie S in einer zerfallenden Kurve schneidet, d. h.

$$U_\Phi^3 \equiv \Phi \equiv U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\, (a\, a'\, a'')^2 = 0$$

ist die Gleichung von S in Ebenenkoordinaten.

Der Klassenkurve

$$u_\alpha^2 \equiv V_A\, V_{A'}\, (a\, a'\, u) = 0$$

ist vermöge der fundamentalen Beziehung der Raumpunkt zugeordnet:

$$U_A\, a_\alpha^2 = 0, \quad V_A\, V_A\, U_{A''}\, (a\, a'\, a'')^2 = 0,$$

d. h. dieser Raumpunkt ist der Polarpunkt der Ebene V in Bezug auf die Steiner'sche Fläche Φ.

Der Pol der Ebene V in Bezug auf den Kegelschnitt u ist:

$$V_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, u)^2 = 0,$$

$$U_A\, (a\, b\, u)^2 = 0,$$

wo $b_x^2 = V_A\, a_x^2$.

Die Form dieser Gleichung ergibt unmittelbar den Satz: „Die Pole einer Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte von S liegen wieder auf einer Steiner'schen Fläche“ (Satz von Lie.[1])

(Es ist ja für diese Fläche $\varrho\, X_i = A_i\, (a\, b\, u)^2$, also die Fläche nach dem Weierstrass'schen Satz eine Steiner'sche.)

[1]) Citiert im Nekrolog auf Lie von Nöther, Mathem. Ann., Bd. 53, gefunden von Königs, Bulletin d. l. S. M. F., Bd. 16; nach Fertigstellung der Arbeit kamen mir noch die in den Fortschritten der Mathematik 1898—1900 citierten Arbeiten von Brambilla, del Pezzo, Montesano zu Gesicht.

Es ist die Form

$$V_A U_{A'} (a\, a'\, u)^2$$

eine Spezialisierung der folgenden:

$$U_A (a\, p\, u)^2,$$

wo $p_x^3 = 0$ eine beliebige rationale Raumkurve 4. Ordnung auf S, bezw. einen beliebigen Kegelschnitt in der Bildebene E darstellt.

Diese Form hinwiederum ist eine derjenigen, die sich uns darbieten, wenn wir die Beziehungen der S zu einer Raumkurve 4. Ordnung $p_x^2 = 0$ auf ihr untersuchen. Es führt uns diese Untersuchung zu den Kovarianten von p_x^2 und den Formen $U_A a_x^2$ u. s. w., $u_\varrho^2 r_x$ u. s. w. Ein genaueres Eingehen hierauf ist uns nicht möglich, nur diejenigen Beziehungen gehören hieher, die sich an unsere sonstigen Betrachtungen eng anschliessen, und die sich aus der Benützung des durch $U_A a_x^2 = 0$ vermittelten „Uebertragungsprincips“ ergeben. Das folgende zeigt, was wir darunter verstehen.

Stellen wir die Bedingung auf, dass der ebene Schnitt

$$V_A a_x^2 = 0$$

in einer besonderen — projektiven — Beziehung zu $p_x^2 = 0$ steht, so erhalten wir für V Relationen, d. h. Flächen, die von den diesen Relationen genügenden Ebenen umhüllt werden. Wir finden diese, indem wir mittels der simultanen In- und Kovarianten von a_x^2, p_x^2 die analytischen Ausdrücke der betreffenden geometrischen Beziehung herstellen, und dann a_x^2 durch U_A zu $U_A a_x^2$ ergänzen.

Die simultanen Invarianten geben dabei folgende Flächen:

$$U_\Phi^3 = U_A U_{A'} U_{A''} (a\, a'\, a'')^2; \quad U_H^2 = U_A U_{A'} (a\, a'\, p)^2;$$

$$U_P = U_A a_\pi^2; \quad [R = p_\pi^2],$$

wobei $u_\pi^2 = (p\, p'\, u)^2$; R ist natürlich keine Fläche. Ferner wird besonders noch die Form $U_A (a\, p\, u)^2$ auftreten als simultane Kovariante.

Eine besonders wichtige und auch der Betrachtung leicht zugängliche Klasse von Flächen ergeben die durch eine Form der Art

$$U_\Gamma c_x^2 \equiv U_A a_x^2 \cdot p_\pi^2 + k \cdot U_A a_\pi^2 \cdot p_x^2 = 0 \qquad (49)$$

auf S bezw. E abgebildeten Flächen, welche i. A. Steiner'sche Flächen sind.

Zu diesen gehört z. B. auch die durch

$$U_A (a\, p\, u)^2 = 0$$

gegebene Fläche. Ersetzt man nämlich u_i durch $p_x p_i$, so kommt:

$$U_A a_\pi^2 \cdot p_x^2 - \tfrac{1}{3} p_\pi^2 \cdot U_A a_x^2 = 0.$$

Die durch $U_\Gamma c_x^2 = 0$ bestimmte Fläche $S_{(k)}$ ist auf S ($S_{(\infty)}$) eindeutig bezogen: wir ordnen entsprechenden Punkten die gleichen Koordinaten zu, dann entsprechen sich Punkte mit gleichen Koordinaten. 2 solche Punkte liegen stets auf einer Geraden durch den Punkt $U_P = 0$.

Die Abbildung ist ferner „ternär-linear", d. h. ein Kegelschnitt von S bildet sich ab auf einen Kegelschnitt von $S_{(k)}$, allgemein eine beliebige Kurve $2\,n^{\text{ter}}$ Ordnung in eine solche ebenderselben Ordnung. Aber die Abbildung ist nicht „quaternär-linear": eine ebene Kurve von S geht durchaus nicht in eine ebene Kurve von $S_{(k)}$ über u. u. Es ist ja:

$$V_\Gamma c_x^2 = V_A a_x^2 \cdot p_\pi^2 + k \cdot V_A a_\pi^2 \cdot p_x^2.$$

Soll nun die Kurve, welche auf S der Kurve $V_\Gamma c_x^2 = 0$ entspricht, eben sein, so muss sie zu u_η^2, u_ϑ^2 apolar sein, es muss also sein: $(k \gtrless o)$

$$V_A a_\pi^2 \cdot p_\eta^2 = 0, \quad V_A a_\pi^2 \cdot p_\vartheta^2 = 0.$$

Dies verlangt, dass entweder $V_A a_\pi^2 = 0$, oder: $p_\eta^2 = 0$, $p_\vartheta^2 = 0$; d. h.: „Die Ebenen durch $U_P = 0$ schneiden S in Kurven, denen auch auf $S_{(k)}$ ebene Schnitte entsprechen: ist $p_x^2 = 0$ ein ebener Schnitt $W_A a_x^2 = 0$ von

S, so geht jeder ebene Schnitt wieder in einen solchen über."

Für weitergehende Untersuchungen ist es wichtig, die Fundamentalkombinante für $S_{(k)}$ zu kennen, d. h. die Form

$$u_\varrho^2 \bar{r}_x = 0,$$

welche zu einem Kegelschnitt u auf $S_{(k)}$ [bezw. dessen Bild auf S] den in derselben Ebene liegenden („beigeordneten") ergibt [dessen Bild nicht identisch ist mit dem beigeordneten von u auf S].

Die Frage ist im wesentlichen nicht verschieden von der nach einer Schaar von Kurven u_μ^2, u_ν^3, für welche

$$U_\Gamma c_\mu^2 = 0, \quad U_\Gamma c_\nu^3 = 0.$$

Wir setzen probierend:

$$u_\mu^2 = \alpha \cdot u_\pi^2 + \beta u_\eta^2 + \gamma u_\vartheta^2;$$

es müsste dann sein:

$$\alpha \cdot U_A a_\pi^2 \cdot p_\pi^2 + k \cdot U_A a_\pi^2 \cdot (\alpha p_\pi^2 + \beta p_\eta^2 + \gamma p_\vartheta^2) = 0,$$

d. h. $$\alpha p_\pi^2 + k \cdot \alpha p_\pi^2 + k \beta p_\eta^2 + k \cdot \gamma \cdot p_\vartheta^2 = 0.$$

Alle Lösungen setzen sich aus zweien linear zusammen, die selbst aber linear unabhängig sein müssen. Man darf setzen:

$$\begin{aligned} u_\mu^2 &= k p_\eta^2 \cdot u_\pi^2 - (k+1) p_\pi^2 \cdot u_\eta^2 \\ u_\nu^3 &= k \cdot p_\vartheta^2 u_\pi^2 - (k+1) p_\pi^2 \cdot u_\vartheta^2. \end{aligned} \tag{50}$$

Die Fundamentalkombinante wird dann:

$$\begin{aligned} u_\varrho^2 r_x = u_\mu u_\nu (\mu \nu x) &= (k+1)^2 \cdot [p_\pi^2]^2 \cdot u_\varrho^2 r_x \\ &- k \cdot (k+1) \cdot p_\pi^2 \cdot u_\pi u_\lambda (\pi \lambda x), \end{aligned} \tag{51}$$

wo $u_\lambda^2 = u_\eta^2 \cdot p_\vartheta^2 - u_\vartheta^2 \cdot p_\eta^2 = (p r u) u_\varrho p_\varrho$ gesetzt ist.

Lässt man den unwesentlichen Faktor $(k+1) \cdot p_\pi^2$ weg, so kommt:

$$\begin{aligned} u_\varrho^2 \bar{r}_x &= (k+1) p_\pi^2 \cdot u_\varrho^2 r_x - k \cdot u_\pi u_\lambda (\pi \lambda x) \\ u_\lambda^2 &= p_\varrho u_\varrho (p r u). \end{aligned} \tag{52}$$

Wir werden sogleich Folgerungen aus den Formeln 50 bis 52 ziehen. Vorher schreiben wir noch die Gleichung von $S_{(k)}$ in Ebenenkoordinaten her:

$$U_\Gamma\, U_{\Gamma'}\, U_{\Gamma''}\,(c\,c'\,c'')^2$$
$$\equiv [p_\pi^2]^2 \cdot U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\,(a\,a'\,a'')^2 + 3\,k\,p_\pi^2 \cdot U_A\, a_\pi^2 \cdot U_A\, U_{A'}\,(a\,a'\,p)^2$$
$$+ k^2\,(3+k)\,[U_A\, a_\pi^2]^3 = 0. \qquad (53)$$

§ 13.

Setzen wir $p_x^2 = V_A\, a_x^2$, so wird $u_\lambda^2 \equiv 0$, $u_\varrho^2\, \bar{r}_x \equiv u_\varrho^2\, r_x$;

ferner: $U_P = U_A\, a_\pi^2$ wird $U_A\, V_{A'}\, V_{A''}\,(a\,a'\,a'')^2$;

$$p_\pi^2 : \equiv V_\Phi^3 \equiv V_A\, V_{A'}\, V_{A''}\,(a\,a'\,a'')^2.$$

Die Lie'sche Fläche zu V wird also (s. S. 52) gegeben durch:

$$U_A\, V_{A'}\, V_{A''}\,(a\,a'\,a'')^2 \cdot V_{A'''}\, a_x'''^2 - \tfrac{1}{3}\, V_\Phi^3 \cdot U_A\, a_x^2 = 0. \qquad (54)$$

Ihre Gleichung in Ebenenkoordinaten wird (s. 53): [$k = -3$]

$$V_\Phi^3 \cdot U_{\Phi'}^3 - 9\, V_\Phi^2\, U_\Phi \cdot U_{\Phi'}^2\, V_{\Phi'} = 0.$$

Man sieht: ist V Tangentialebene an S, so erhalten wir keine eigentliche Lie'sche Fläche: bezw. es zerfällt dieselbe in die erste und zweite Polare von V in Bezug auf S.

Da $u_\varrho^2\, \bar{r}_x \equiv u_\varrho^2\, r_x$, sind beide Flächen nicht nur eindeutig, sondern auch projektiv auf einander bezogen: liegen 4 Punkte von S in einer Ebene, so liegen die entsprechenden von $L_{(r)}$ auch auf einer Ebene. Da ferner entsprechende Punkte auf einer Geraden durch $U_P \equiv U_A\, V_{A'}\, V_{A''}\,(a\,a'\,a'')^2 = 0$ liegen, sind beide Flächen perspektiv auf einander bezogen. Alle Singularitäten der Lie'schen Fläche entstehen durch Projektion (von $V_\Phi\, U_\Phi = 0$) aus denen der Fundamentalfläche u. s. w.

Die Operation nun, durch welche wir aus der Fundamentalfläche die Lie'sche Fläche erhielten, lässt sich wieder auf diese

anwenden; wir erhalten dadurch die zweite, dritte . . . Lie'sche Fläche zu S, die wir durch $L^{(1)}_{(V)}$, $L^{(2)}_{(V)}$ · · · unterscheiden wollen.

Die Gleichung (54) lautete:

$$U_{\Gamma_1} c_{1x}^2 \equiv V_A a_x^2 \cdot U_P - \tfrac{1}{3} \Phi_0 \cdot U_A a_x^2$$

wo $$U_P \equiv U_A V_{A'} V_{A''} (a\, a'\, a'')^2 \equiv V_\Phi^3 U_\Phi,$$

also $$V_P \equiv \Phi_0 \equiv V_A V_{A'} V_{A''} (a\, a'\, a'')^2.$$

Die Gleichung der Fläche $L^{(1)}_{(V)}$ war

$$U_{\Phi_1}^3 \equiv \Phi_0 \cdot U_\Phi^3 - 9\, U_P \cdot U_H^2.$$

Es wird also:

$$\begin{aligned} V_{\Phi_1}^3 &\equiv \Phi_1 \equiv \Phi_0^2 - 9\, \Phi_0^2 \equiv -8\, \Phi_0^2 \\ 3\, U_{H_1}^2 &\equiv 3\, \Phi_0 \cdot U_H^2 - 9\, \Phi_0 \cdot U_H^2 - 18\, (U_P)^2 \\ U_{H_1}^2 &\equiv -2\, \Phi_0 \cdot U_H^2 - 6\, (U_P)^2 \\ U_{P_1} &\equiv -8\, \Phi_0 \cdot U_P. \end{aligned}$$

Also die Parameterdarstellung von $L^{(2)}_{(V)}$

$$\begin{aligned} U_{\Gamma_2} c_{1x}^2 &= V_{\Gamma_1} c_{1x}^2 \cdot U_{P_1} - \tfrac{1}{3}\, \Phi_1 \cdot U_{\Gamma_1} c_{1x}^2 \\ &= \tfrac{2}{3}\, \Phi_0 \cdot V_A a_x^2 \cdot (-8\, \Phi_0 \cdot U_P) - \tfrac{1}{3} (-8\, \Phi_0^2) (V_A a_x^2\, U_P \\ &\qquad - \tfrac{1}{3}\, \Phi_0\, U_A a_x^2) \\ &= -\tfrac{8}{3}\, \Phi_0^2\, V_A a_x^2 \cdot U_P - \tfrac{8}{9}\, \Phi_0^2 \cdot U_A a_x^2 \end{aligned}$$

oder, lässt man den unwesentlichen Faktor weg: $\frac{8}{3} \Phi_0^2$, so kommt:

$$U_{\Gamma_2} c_{2x}^2 \equiv V_A a_x^2\, U_P + \tfrac{1}{3}\, \Phi_0 \cdot U_A a_x^2. \tag{55}$$

Der Vergleich von (55) mit (54) lässt erkennen, dass $U_{\Gamma_2} c_{2x}^2$ aus $U_{\Gamma_1} c_{1x}^2$ hervorgeht, indem man $k_1 = -3$ ersetzt durch $k_2 = +3$. Es ist auch sehr leicht, ohne weitere Rechnung allgemein anzugeben, wie $L^{(m+1)}_{(V)}$ aus $L^{(m)}_{(V)}$ hervorgeht.

Wir nehmen an, es sei $U_{\Gamma_m} c_{mx}^2$ auf die Form gebracht:

$$U_{\Gamma_m} c_{mx}^2 \equiv V_A a_x^2\, U_P + \tfrac{1}{n}\, \Phi_0\, U_A a_x^2; \tag{56}$$

Es ist dann ferner nach Definition:

$$U_{\Gamma_{m+1}} c_{(m+1)x}^2 \equiv V_{\Gamma_m} c_{mx}^2 \cdot U_{P_m} - \tfrac{1}{3} \cdot \Phi_m \cdot U_{\Gamma_m} c_{mx}^2.$$

Aus (56) folgt: $V_{U_m}\, c^{\bar{a}}_{m\,x} = V_A\, a^{\bar{a}}_x\, V_P + \frac{1}{n}\, \Phi_0\, V_A\, a^{\bar{a}}_x = \frac{n+1}{n}\, \Phi_0\, V_A\, a^{\bar{a}}_x$. Ferner muss U_{P_m} sich ausdrücken durch U_P mal einem Faktor:

$$U_{P_m} = U_P \cdot M$$

$$V_{P_m} = \Phi_m = V_P \cdot M = \Phi_0 \cdot M,$$

also:

$$U_{V_{m+1}\, c^{\bar{a}}_{(m+1)\,x}} = M\, \frac{n+1}{n} \cdot \Phi_0 \cdot V_A\, a^{\bar{a}}_x \cdot U_P - \tfrac{1}{3} \cdot M \cdot \Phi_0 \cdot (V_A\, a^{\bar{a}}_x \cdot U_P + \tfrac{1}{n}\, \Phi_0 \cdot U_A\, a^{\bar{a}}_x)$$

$$= M\, \Phi_0 \{ \tfrac{n+1}{n}\, V_A\, a^{\bar{a}}_x \cdot U_P - \tfrac{1}{3}\, V_A\, a^{\bar{a}}_x \cdot U_P - \tfrac{1}{3n}\, \Phi_0 \cdot U_A\, a^{\bar{a}}_x \}$$

oder auch:

$$U_{V_{(m+1)}\, c^{\bar{a}}_{(m+1)\,x}} = V_A\, a^{\bar{a}}_x\, U_P - \tfrac{1}{2n+3}\, \Phi_0\, U_A\, a^{\bar{a}}_x. \qquad (57)$$

Wenn also $k_m = n$, so ist $k_{m+1} = -(2n+3) = -(2k_m + 3)$. Es ist $k_1 = -3$; $k_2 = -(-6+3) = +3$; wir setzen daher, da offenbar alle k_m durch 3 teilbar sind: $k_m = 3\, K_m$, dann wird

$$K_{m+1} = -(2\, K_m + 1).$$

Um K_{m+1} independent darzustellen, schreibt man die Zahlen K_m der Reihe nach hin:

$$K_1 = -1$$

$$K_2 = -2\, K_1 - 1$$

$$K_3 = +2 \cdot 2\, K_1 + 2 \cdot 1 - 1$$

$$K_4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot K_1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1,$$

offenbar:

$$K_{m+1} = (-1)^m \cdot 2^m \cdot K_1 + (-1 + 2 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 \cdots + (-1)^m \cdot 2^{m-1})$$

$$= (-1)^m \cdot 2^m\, K_1 - \frac{1 - (-2)^m}{3}$$

$$= (-2)^m \cdot K_1 + \frac{(-2)^m - 1}{3} = (-2)^m \cdot (K_1 + \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{3}.$$

Da $K_1 = -1$, kommt weiter:

$$K_{m+1} = -\tfrac{2}{3} \cdot (-2)^m - \tfrac{1}{3} = +\tfrac{1}{3} \cdot ((-2)^{m+1} + 1),$$

also:

$$K_{m+1} = \tfrac{1}{3}(1 + (-2)^{m+1})$$

$$k_m = 1 + (-2)^m.$$

Indem wir die ursprüngliche Definition der Lie'schen Flächen beiseite lassen und nur die durch die Formeln

$$U_\Gamma c_x^2 = k_m V_A a_x^2 U_P + \Phi_0 U_A a_x^2$$

gegebene aufrecht erhalten, können wir auch Lie'sche Flächen zu beliebigem Index x definieren und darstellen mittels:

$$k_x = 1 + (-2)^x.$$

Natürlich: wir sahen ja, dass die Lie'schen Flächen auseinander durch Kollineationen hervorgehen. Dass man aber die wiederholte Anwendung derselben in der vorstehenden Weise erweitern kann, ist bekannt.[1])

§ 14.

Ist die Kurve $p_x^2 = 0$ eine allgemeine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Spezies auf S, so liefern uns die Formeln des § 13 die Möglichkeit, ihre Eigenschaften bezüglich ihrer Lage zu den Kurven auf S zu diskutieren.

Vor weiteren Untersuchungen wird man sich die Frage vorlegen, wie denn geometrisch der Punkt

$$U_A a_\pi^2 = 0$$

mit $u_\pi^2 = 0$ bezw. $p_x^2 = 0$ auf S zusammenhängt.

Sei y ein beliebiger Punkt auf S. Es gehen durch y 2 Kegelschnitte, welche $p_x^2 = 0$ berühren, in den Punkten z und t. Dann ist:

$$\sigma u_\pi^2 = u_y^2 + \varkappa u_z u_t$$

$$\sigma U_A a_\pi^2 = U_A a_y^2 + \varkappa U_A a \; a_t.$$

[1]) s. Clebsch-Lindemann I, S. 995 ff.

Der Punkt $U_P = 0$ liegt also auf einer Geraden mit $U_A a_y^2 = 0$ und dem Polarpunkt zu z, t. Wir können daher sagen:

„Nehmen wir auf S einen beliebigen Punkt y, von dem aus 2 Kegelschnitte tangierend an $p_x^2 = 0$ gelegt werden können, mit den Berührungspunkten z und t, so liegt y mit dem Polarpunkt zu z, t auf einer Geraden, die stets durch denselben Punkt $U_A a_\pi^2 = 0$ geht, wie auch y gewählt sein mag."

Anschaulicher ist vielleicht folgende Definition: „nehmen wir zu $u_\pi^2 = 0$ eine beliebige Asymptotenkurve hinzu, so haben beide 4 berührende Kegelschnitte gemeinsam, die sich in 6 Punkten schneiden. Die Tangentialebenen in diesen 6 Punkten schneiden sich alle und stets, welche Haupttangentenkurve auch benützt wurde, in einem Punkt, eben dem Punkt $U_P \equiv U_A a_\pi^2 = 0$."

Da $U_A a_\eta^2 \equiv 0$, $U_A a_\mathfrak{h}^2 \equiv 0$, so liefert die erstere Definition für Haupttangentenkurven den Satz:

Legt man von einem Punkt y an eine Haupttangentenkurve die 2 möglichen Berührungskegelschnitte, so ist der Polarpunkt der Berührpunkte mit y identisch.

In ähnlicher Weise kann man die Fläche

$$U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, p)^2 = 0$$

definieren als die Fläche zweiter Klasse, die gewisse ∞^2 abwickelbare Flächen enthält; man kann ja setzen (auf ∞^2 Arten)

$$p_x^2 = v_x^2 + \lambda\, u_x\, w_x$$

$$U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, p)^2 = U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, v)^2 + \lambda\, U_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, u)\, (a\, a'\, w).$$

Die abwickelbaren Flächen der Ebenen, die der „Polarfläche zu u, w" und dem Kegelschnitt v gemeinsam sind, berühren auch $U_\Pi^2 = 0$.

Von den Steiner'schen Flächen nun, die man auf die

in § 13 gezeigte Weise aus $p_x^2 = 0$ ableitet, ist die wichtigste die folgendermassen in Parameterform gegebene:

$$U_\Gamma c_x^2 \equiv U_A a_x^2 p_\pi^2 - U_A a_\pi^2 p_x^2 = 0$$

(also $k = -1$).

Das System der apolaren Klassenkurven besteht ersichtlich aus:

$$u_\pi^2 = 0,\ u_\lambda^2 \equiv u_\eta^2 p_\vartheta^2 - u_\vartheta^2 p_\eta^2 = 0;$$

die durch $U_\Gamma c_x^2 = 0$ dargestellte S^* enthält $p_x^2 = 0$ (auf S) und $V_\Gamma c_x^2$ ist stets zu $(p\,p'\,u)^2 \equiv u_\pi^2 = 0$ apolar, d. h. $p_x^2 = 0$ ist Asymptotenlinie auf S^*.

Die gegenseitigen Beziehungen von S^* und p_x^2 sind demnach dieselben, wie die von S und einer beliebigen Asymptotenlinie auf ihr.

Nun hat eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Spezies 4 Wendeberührebenen,[1]) die in 4 konsekutiven Punkten schneiden: es sind dies für eine Asymptotenlinie von S die 4 singulären Tangentialebenen, da ja in einem Berührpunkt mit einem Doppelkegelschnitt in der That 4 konsekutive Punkte der Asymptotenlinien vereinigt sind. Die Doppelgeraden von S sind diejenigen 3 Sehnen, welche zugleich in den Schmiegungsebenen ihrer Schnittpunkte mit der Asymptotenlinie liegen.

S ist Ort der Ebenen, welche die Asymptotenlinie in 4 harmonischen Punkten treffen, also auch speziell der Schmiegungsebenen von der Asymptotenlinie. Nämlich: in der Bildebene E ist der Schnitt einer Tangentialebene von S gegeben durch 2 Gerade, die zu den Kegelschnitten der Schaar $(\eta,\ \vartheta)$ konjugiert sind, also 4 harmonische Punkte aus jedem solchen Kegelschnitt ausschneiden.

Der Ort der Ebenen, welche die Asymptotenkurve $\lambda_1 u_\eta^2 + \lambda_2 u_\vartheta^2 = 0$, $\mathfrak{a}_\lambda u_\alpha^2 = 0$ bezw. $\mathfrak{b}_\lambda^2 b_x^2 = 0$ in vier äqui-anharmonischen Punkten schneiden, ist:

$$\mathfrak{b}_\lambda^2 U_A U_{A'} (a\,a'\,\mathfrak{b})^2 = 0.$$

[1]) s. für das folgende insbes. Armenante, Battagl. Giornale t. 11, 12.

Wenn nämlich die 2 simultanen Invarianten a_a^2, $(a\,a', a\,a')^2$ von a_x^2, $(a\,a'\,x)^2$ verschwinden, ist das Doppelverhältnis auf beiden [Kegelschnitten in E] Kurven äqui-anharmonisch.

Diese Fläche zweiter Klasse ist auch diejenige, auf der die dreifachen Sekanten der Asymptotenlinie (λ) liegen, die einzige Fläche zweiter Ordnung und Klasse, welche die ganze Asymptotenlinie enthält. Diese Flächen zweiter Ordnung, welche also je eine Asymptotenkurve enthalten, bilden ein einfach unendliches System durch 4 feste Punkte auf S. Jede solche Fläche schneidet ausser in der betreffenden Haupttangentenkurve λ noch in einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Spezies (s. S. 43 ff.)

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})^2\,\mathfrak{c}_\lambda\,b_x^2 = 0.$$

Diese gehen aber alle, als reciprok zu der Schaar der Asymptotenkurve (s. a. a. O.) durch 4 feste Punkte, demnach auch die oben erwähnten F_2.

Die Flächen zweiter Klasse:

$$\mathfrak{b}_\lambda^2\,U_A\,U_{A'}\,(a\,a'\,b)^2 = 0$$

haben eine Enveloppe:

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}')^2\,U_A\,U_{A'}\,U_{A''}\,U_{A'''}\,(a\,a'\,b)^2\,(a''\,a'''\,b')^2 = 0,$$

auf die wir im nächsten Paragraphen noch einmal stossen werden.

Unter den dreifachen Sekanten einer Asymptotenlinie (λ) sind 4 Tangenten, welche also die Asymptotenlinie noch einmal treffen. Wie man geometrisch ohne Schwierigkeiten beweist, bilden sich die Schnittpunkte der dreifachen Sekanten ab (in der Bildebene E) in die Ecken der der Kurve

$$a_\lambda\,u_a^2 = 0 \text{ bezw. } \mathfrak{b}_\lambda^2\,b_x^2 = 0$$

einbeschriebenen Polardreiecke der zu (λ) konjugierten Schaarkurve:

$$\mathfrak{a}_\mu\,u_a^2 = 0 \text{ bezw. } \mathfrak{b}_\mu^2\,b_x^2 = 0,$$

wo also sein muss:

$$\mathfrak{b}_\lambda^2\,\mathfrak{a}_\mu\,\mathfrak{b}_a^2 = 0 \text{ oder } \mathfrak{a}_\lambda\,\mathfrak{a}_\lambda'\,\mathfrak{a}_\mu''\,(a\,a'\,a'')^2 = 0 \text{ oder } \mathfrak{c}_\lambda^2\,\mathfrak{c}_\mu = 0.$$

Die Schnittpunkte von (λ) und (μ) geben dann offenbar Tangenten als dreifache Sekanten.

Mit der vorstehend gekennzeichneten Bedeutung von $c_\lambda^2 c_\mu = 0$ ist es nun leicht, die binäre Form c_λ^3 in ihrer Bedeutung für S zu diskutieren. $c_\lambda^3 = 0$ gibt die Asymptotenlinien, welche zu sich konjugiert sind, also zerfallen. Soll das Doppelverhältnis der 4 Punkte, in denen die singulären Tangenten (die nochmals schneiden) berühren, äqui-anharmonisch sein, so muss sein:

$$c_\lambda^2 c_\mu = 0, \quad c_\mu^2 c_\lambda = 0,$$

woraus durch Elimination für λ und μ sich ergibt:

$$\Delta_\mu^2 \text{ bezw. } \Delta_\lambda^2 \equiv (c\,c')^2 c_\mu c'_\mu \text{ bezw. } (c\,c')^2 c_\lambda c'_\lambda = 0.$$

Die durch diese Gleichung bestimmten 2 Asymptotenlinien sind sich also wechselseitig zugeordnet.

Auch wenn wir nach dem Doppelverhältnis der 4 Wendeberührpunkte auf einer Asymptotenlinie fragen, erhalten wir durch die vorgenannten die „äqui-anharmonischen“ Asymptotenlinien. Allgemein, ist dies Doppelverhältnis gegeben durch s, so ist λ bestimmt durch (s. S. 45):

$$\frac{\Delta^3}{Q^2} = \frac{-2\cdot(1-s+s^2)^3}{(1+s)^2(2-s)^3(1-2s)^2}.$$ [1])

Wir sehen daraus, dass für die durch $Q = 0$ bestimmten Asymptotenlinien die 4 Wendeberührpunkte (die Berührpunkte mit $h_x^4 = 0$ auf S) harmonisch sind, d. h. auf einer Ebene liegen. [Es sind dies auch die 3 Asymptotenlinien mit wirklichen Doppelpunkten; man findet dies, wenn man das Doppelverhältnis der Schnittpunkte von λ mit einer Seite des gemeinsamen „Polardreiecks“ der Schaar aufsucht und die Bedingung aufstellt, dass die 2 Schnittpunkte harmonisch liegen zu dem Punktepaar der betreffenden Seite.]

Das, was wir jetzt über die Asymptotenlinien gesagt haben, können wir nun unmittelbar übertragen auf eine be-

[1]) s. Gundelfinger, Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 36.

liebige Raumkurve 4. Ordnung 2. Spezies $p_x^2 = 0$ auf S: das ausgezeichnete Tangentenvierseit in der Abbildung wird gegeben durch die gemeinsamen Tangenten von p_x^2 bezw. $(p\,p'\,u)^2 \cdot u_\pi^2$, und $u_\lambda^2 = u_\eta^2\, p_\vartheta^2 - u_\vartheta^2\, p_\eta^2$ (s. S. 53). Die Berührpunkte auf $u_\pi^2 = 0$ geben die 4 Wendeberührpunkte u. s. w. Die Fläche 2. Ordnung, welche $p_x^2 = 0$ enthält, ist in Ebenenkoordinaten gegeben durch:

$$U_\Gamma\, U_{\Gamma'}\, (c\,c'\,p)^2 = 0,$$

$$U_N^2 \equiv p_\pi^2\, U_A\, U_{A'}\, (a\,a'\,p)^2 - [U_A\, a_\pi^2]^2 = 0.$$

Die Steiner'sche Fläche, deren Tangentialebenen $p_x^2 = 0$ in 4 harmonischen Punkten treffen, ist:

$$U_M^3 = U_\Gamma\, U_{\Gamma'}\, U_{\Gamma''}\, (c\,c'\,c)^2 = 0,\ (p_\pi^2)^2\, U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\, (a\,a'\,a'')^2$$

$$- 3\, p_\pi^2 \cdot U_A\, a_\pi^2 \cdot U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\, (a\,a'\,p)^2 + 2\, [U_A\, a_\pi^2]^3 = 0,$$

welche aus (53) für $k = -1$ entsteht. Beide Flächen erhalten wir als Spezialfälle, wenn wir die Flächen aufsuchen, deren Tangentialebenen p_x^2 nach gegebenem Doppelverhältnis schneiden. Umgekehrt sind alle diese Flächen von der Form

$$(U_N^2)^3 - k \cdot (U_M^3)^2 = 0,$$

wo k in bekannter Weise vom Doppelverhältnis abhängt.

§ 15.

Für die Betrachtung der Kovarianten von U_Φ^3 bietet unsere Parameterdarstellung im Allgemeinen natürlich keine wesentliche Erleichterung: im Allgemeinen; in speziellen Fällen aber ist sie doch geeignet, wichtige Sätze analytisch erkennen zu lassen. So werden wir sogleich zeigen, dass die Hesse'sche Fläche von $U_\Phi^3 = 0$, also von unserer Steiner'schen Fläche als Fläche dritter Klasse, identisch ist mit

$$(b\,b')^2\, U_A\, U_{A'}\, U_{A''}\, U_{A'''}\, (a\,a'\,b)^2\, (a''\,a'''\,b')^2 = 0,$$

die wir im vorigen Paragraphen fanden.

Es soll die erste Polare von V in Bezug auf $U_\Phi^3 = 0$ zerfallen, also

$$U_A\, U_{A'}\, V_{A''}\, (a\, a'\, a'')^2 = 0$$

eine Fläche zweiter Klasse, einen Kegelschnitt darstellen. Dann muss es eine Ebene W geben (die Ebene dieses Kegelschnittes) von der Eigenschaft, dass

$$U_A\, W_{A'}\, V_{A''}\, (a\, a'\, a'')^2 = 0$$

für jeden Wert von U. Dies ist nur dann und stets dann der Fall, wenn $W_A\, V_{A'}\, (a\, a'\, u)^2 = 0$ eine Asymptotenlinie ist. Wir können aber auch sagen: es muss $V_A\, a_x^2$ eine Kurve sein, die apolar ist zum System

$$W_A\, U_{A'}\, (a\, a'\, u)^2 = 0.$$

Die zu diesem System apolaren Kurven bilden ein Büschel, das wir nach früherem leicht angeben können: sie sind reciprok zur Schaar $\mathfrak{a}_\lambda\, u_\alpha^2 = 0$ oder $(\eta,\ \vartheta)$ in Bezug auf $W_A\, a_x^2 = 0$, also:

$$\mathfrak{a}_\lambda\, W_A\, W_{A'}\, a_\alpha\, a'_\alpha\, a_x\, a'_x = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{a}_\lambda\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, \widehat{\alpha\, x})^2 = 0,$$

da $\mathfrak{a}_\lambda\, W_A\, a_\alpha^2 = 0$. Soll nun $V_A\, a_x^2$ eine Kurve λ dieses Büschels sein, so muss auch umgekehrt die Kurve λ dieses Büschels dem System

$$U_A\, a_x^2 = 0$$

angehören, also zu $\mathfrak{a}_\lambda\, u_\alpha^2 = 0$ apolar sein, es muss sein:

$$\mathfrak{a}'_1\, \mathfrak{a}_\lambda\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, \widehat{\alpha\, \alpha'})^2 = 0 \qquad \mathfrak{a}'_2\, \mathfrak{a}_\lambda\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, \widehat{\alpha\, \alpha'})^2 = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{b}_\lambda\, \mathfrak{b}_1\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, b)^2 = 0 \qquad \mathfrak{b}_\lambda\, \mathfrak{b}_2\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, b)^2 = 0.$$

Dass dies möglich sei, erfordert aber, dass die Determinante dieser 2 Gleichungen für λ verschwinde, also muss sein:

$$(\mathfrak{b}\, \mathfrak{b}')^2\, W_A\, W_{A'}\, (a\, a'\, b)^2\, W_{A''}\, W_{A'''}\, (a''\, a'''\, b')^2 = 0.$$

Damit ist die Fläche bestimmt, welche umhüllt wird von den Ebenen der Kegelschnitte, welche zerfallende erste Polaren

sind: dieselbe ist natürlich, wie aus der Symmetrie der Bedingungsgleichung:

$$V_A W_{A'} U_{A''} (a\, a'\, a'')^2 \equiv 0$$

für V und W folgt, identisch mit der Fläche der V, der Hesse'schen Fläche von $U_\Phi^3 = 0$.

Damit schliessen wir die Betrachtung der Form $U_A a_x^2$ ab, und damit auch der Hauptsache nach unsere Untersuchungen. Wir werden nur noch kurz zeigen, wie die der Form $U_A a_x^2$ ähnlichen Kovarianten derselben in ganz analoger Weise dazu dienen, die Steiner'sche Fläche als Tangenten- und als Tangentialgebilde zu definieren, bezw. auf die Bildebene abzubilden.

§ 16.

Als Spezialfall der 2 Punkte x und y von S verbindenden Geraden

$$(A\, A'\, X\, Y)\, (a_x a'_y + a_y a'_x)\, (a\, a'\, \widehat{x\, y}) = 0$$

erscheint die Tangente im Punkte x, welche den durch x gehenden Kegelschnitt u berührt:

$$(A\, A'\, X\, Y)\, a_x a'_x (a\, a'\, u) = 0 \quad \text{(wobei } u_x = 0\text{)}.$$

Fällt die Bedingung $u_x = 0$ weg, so ist uns auch dann noch die geometrische Bedeutung dieses Ausdrucks bekannt: es ist dann die Gleichung der Geraden, auf der die Polarpunkte zu x und den Punkten von u liegen, der „Polargeraden $G(x, u)$ von x mit u."

Für die weitere Diskussion der obigen Form wird man besser die mit ihr als äquivalent definierte benützen:

$$(B\, \Gamma\, X\, Y)\, b_x^2\, u_\beta = 0.$$

Gibt man X und Y, so erhalten wir in E bezw. auf S einen Konnex (2, 1) von folgender Bedeutung: x, u sind ein Konnexelement, wenn die Polargerade von x mit u, $G(x, u)$ die Gerade $(X\ Y)$ schneidet. Die Hauptkoincidenz dieses

Konnexes gibt die Elemente $x\,u, (u_x = 0)$, deren Tangenten $(X\ Y)$ schneiden.

Jeder Geraden $(X\ Y)$ entspricht ein solcher Konnex, den Geraden des Raums also ein System von 6 linear unabhängigen Konnexen. Es wird also 12 apolare Konnexe (1, 2) geben, und es ist leicht, dieselben anzugeben: ist nämlich y, y_1 ein Paar von Kuspidalpunkten auf derselben Doppelgeraden, so ist nach Definition, da y, y_1 zur Schaar (η, ϑ) gehören,

$$U_A\, a_y\, a_{y_1} \equiv 0.$$

Ist x ein beliebiger Punkt, so muss die Form identisch Null sein:

$$(A\ A'\ X\ Y)\ a_y\, a_{y_1}\, a'_y\, a'_x = 0$$

oder $$(A\ A'\ X\ Y)\ a_y\, a'_y\, (a\ a', y_1\ x) \equiv 0.$$

Dies ist äquivalent mit 2 Null-Identitäten; da es 6 Kuspidalpunkte gibt, so folgt:

„Das System der 12 zum System $(B\,B'\,X\ Y)\ b_x^3\, u_\beta = 0$ apolaren Konnexe wird konstituiert durch die Konnexe

$$u_y^2 \cdot v_x = 0, \qquad (\text{wobei } v_{y_1} = 0)$$

wo y ein Kuspidalpunkt, y_1 der auf derselben Doppelgeraden gelegene."

Stellt man dann die Bedingung auf, dass 6 Gerade G (x, u) einem linearen Komplex angehören, so kann man dieselbe mittels des Begriffs der konjugierten Konnexe in den Koeffizienten (y, v) bezw. r, ϱ ausdrücken.

Nachdem wir den Konnex (1, 2) schon im Anfang der Arbeit behandelt haben, können wir ohne weiteres folgendes aussagen:[1])

[1]) Es muss hier bemerkt werden, dass ein solcher Konnex (2, 1) genau so entstanden ist, wie $u_\varrho^2\, r_x$, nämlich durch den Ω Prozess aus einer Determinante $(A\ A'\ X\ Y) \begin{vmatrix} a_x^2 & a_y^2 \\ a'^2_x & a'^2_y \end{vmatrix}$, so dass auch dieselben Relationen unter den Koeffizienten gelten.

Ist $(X\ Y)$ gegeben, so ist durch:

$$(B\,\Gamma\,X\ Y)\,(B'\,\Gamma'\,X\ Y)\,(b\,b'\,u)^2\,u_\beta\,u_{\beta'} = 0$$

auf S das Produkt der 4 Schnittpunkte von $X\ Y$ mit S gegeben, durch:

$$(B\,\Gamma\,X\ Y)\,(B'\,\Gamma'\,X\ Y)\,(B''\,\Gamma''\,X\ Y)\,(b\,b'\,b'')^2\,u_\beta\,u_{\beta'}\,u_{\beta''} = 0$$

das Produkt der Berührpunkte der 3 Tangenten von $X\ Y$ an S.

Damit von den 4 Schnittpunkten 2 zusammenfallen, muss die — einzige — Invariante des obigen Konnexes (2, 1) verschwinden. Dieselbe stellt aber die Diskriminante der Kurve dar:

$$(B\,\Gamma\,X\ Y)\,(B'\,\Gamma'\,X\ Y)\,b_{\beta'}\,b'_\beta\,b_x\,b'_x = 0,$$

die der Kurve u_σ^2 beim Konnex $u_\varrho^2\,r_x = 0$ analog ist. Die Gleichung der Steiner'schen Fläche in Linienkoordinaten ist demnach:

$$(B\,\Gamma\,X\ Y)\,(B'\,\Gamma'\,X\ Y)\,(B''\,\Gamma''\,X\ Y)\,(B'''\,\Gamma'''\,X\ Y)$$
$$(B^{(4)}\,\Gamma^{(4)}\,X\ Y)\,(B^{(5)}\,\Gamma^{(5)}\,X\ Y)$$
$$b_{\beta'}\,b'_\beta\,b''_{\beta'''}\,b'''_{\beta''}\,b^{(4)}_{\beta^{(5)}}\,b^{(5)}_{\beta^{(4)}}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}''\,\mathfrak{b}^{(4)})\,(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{b}^{(5)}) = 0$$

und es ist dies zugleich die einzige Kovariante der Steiner'schen Fläche, welche blos Linienkoordinaten $(X\ Y)$ enthält.

§ 17.

Durch 3 Punkte $U_A\,a_x^2 = 0$, $U_A\,a_y^2 = 0$, $U_A\,a_z^2 = 0$ ist eine Ebene bestimmt, die speziell zur Tangentialebene wird, wenn x, y, z unendlich nahe oder auf einem Kegelschnitt (in endlicher oder unendlich kleiner Entfernung) liegen. Diesen beiden Fällen entsprechend wird S als Umhüllungsgebilde von Tangentialebenen sowohl durch

$$(A\,A'\,A''\,X)\,a_x\,a'_x\,a''_x = M_X\,m_x^3 = 0,$$

wie durch

$$(A\,A'\,A''\,X)\,(a\,a'\,u)\,(a'\,a''\,u)\,(a\,a''\,u) = N_X\,u_v^3 = 0$$

definiert. Beide Formen zeigen zunächst wieder, dass S von der dritten Klasse ist.

Die Kurven $M_i m_x^3 = 0$ gehen alle durch die Kuspidalpunkte auf S. 2 Kurven $M_X m_x^3 = 0$, $M_Y m_x^3 = 0$ haben also 3 Punkte, d. h. die Tangentialkegel aus X und Y, deren Berührungskurven jene sind, 3 Tangentialebenen gemeinsam.

Je 2 Klassenkurven in E $N_X u_\nu^3 = 0$, $N_Y u_\nu^3 = 0$ haben (ausser den 3 Doppelgeraden, die sie stets berühren) 6 Tangenten gemeinsam, die sich in 3 Paare beigeordneter Geraden ordnen. Auf S gibt das 3 Tangentialebenen, welche den 2 Tangentialkegeln gemeinsam sind.

Die abwickelbare Fläche längs eines Kegelschnitts der Fläche ist von der 3. Ordnung: sie ist in Parameterdarstellung für den Kegelschnitt u durch x und y:

$$M_X m_x^3 + 3\lambda M_X m_x^2 m_y + 3\lambda^2 M_X m_x m_y^2 + \lambda^3 M_X m_y^3 = 0.$$

Man sieht: $M_X m_x^2 m_y = 0$ ist eine Ebene durch x, welche die Tangente in x an $(x\,y)$ enthält. Ausserdem schliesst man aus der Form der Parameterdarstellung, dass $M_X m_x^2 m_y$ durch den Punkt der Rückkehrkante geht, der auf der Tangentialebene von y liegt.

Aus dieser Definition schon erkennt man, dass sich eben alle diese Formeln viel einfacher und anschaulicher deuten lassen an der Fläche, welche zur Steiner'schen reciprok ist.

Dagegen stellen die — Kombinant — Invarianten der ternären Formen $M_X m_x^3 = 0$, $N_X u_\nu^3 = 0$ als quaternäre Gebilde gerade sehr wichtige Kovarianten von S in Punktkoordinaten dar.

Nach Gundelfinger, Crelle 80 (oder auch Gerbaldi, Atti di Torino, Bd. 25) kann man alle Kombinant-Invarianten von 3 Kegelschnitten durch 2 solche darstellen, eine vom 2. und eine vom 4. Grad.

Erstere liefert die Fläche 2. Ordnung:

$$M_X N_X m_\nu^3 = 0.$$

Letztere kann beliebig unter den Invarianten 4. Grads gewählt werden: die Resultante der 3 Kegelschnitte, d. h. die Bedingung, dass 3 Ebenen durch X einen Punkt x auf S gemeinsam haben, wird gegeben durch:

$$M_X\, M'_X\, M''_X\, M'''_X\, (m\, m'\, m'')\, (m\, m'\, m''')\, (m\, m''\, m''')\, (m'\, m''\, m''')$$
$$- M_X\, M'_X\, M''_X\, N_X\, (m\, m'\, m'')^2\, m_\nu\, m'_\nu\, m''_\nu = 0.$$

Letzteres ist sonach die Gleichung von S in Punktkoordinaten. Um zu erkennen, was die Fläche 2. Ordnung für eine Bedeutung hat, suchen wir ihren Schnitt mit S, welcher die Kurve gibt:

$$M_A\, N_{A'}\, m_\nu^3\, a_x^2\, a_x'^2 = 0.$$

Diese Kurve entsteht, wenn wir die Bedingung aufstellen, dass

$$M_A\, m_y^3\, a_x^2 = 0, \quad N_A\, u_\nu^3\, a_x^2 = 0,$$

bezw. $$(\varrho\, x\, y)^2\, r_y = 0, \quad u_x \cdot u_\varrho^2\, r_x = 0$$

als Kurve in y und u zu einander konjugiert sind, bezw. wenn wir den Prozess $\Sigma \dfrac{\partial^2}{\partial u_1\, \partial y_1}$ 3 mal anwenden. Dadurch bekommen wir aber, bis auf eine numerische Konstante

$$h_x^4 \equiv (\varrho\, \varrho'\, x)^2\, r_x\, r'_x = 0.$$

Damit ist also die Fläche

$$M_X\, N_X\, m_\nu^3 = 0$$

als diejenige erkannt, welche durch die 4 singulären Kegelschnitte von S geht. (Cremona.)

Die Gleichung von S lässt sich unsymbolisch noch in einer Form geben, die für manche Untersuchungen praktisch ist.[1])

Eliminiert man $\sigma_1\, x_1^2\, x_1\, x_2 \ldots$ aus folgenden 7 Gleichungen:

$$\sigma\, X_i = A_i\, a_x^2 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$
$$0 = M_X\, m_x^2\, m_k \quad x = 1, 2, 3,$$

[1]) Auch gegeben von Rosanes (nach Brill) im 6. Bd. der Mathem. Annalen.

so erhält man:

$$\begin{vmatrix} X_1 & A_1 a_{11} & A_1 a_{12} & \cdots & A_1 a_{33} \\ X_2 & A_2 a_{11} & A_2 a_{12} & \cdots & A_2 a_{33} \\ X_3 & A_3 a_{11} & A_3 a_{12} & \cdots & A_3 a_{33} \\ X_4 & A_4 a_{11} & A_4 a_{12} & \cdots & A_4 a_{33} \\ O & M_X m_{111} & M_X m_{112} & \cdots & M_X m_{133} \\ O & M_X m_{211} & M_X m_{212} & \cdots & M_X m_{233} \\ O & M_X m_{311} & M_X m_{312} & \cdots & M_X m_{333} \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung von S. Wir bemerken dazu, dass nach S. 6 für jeden Wert von y

$$M_A m_x^2 m_y a_x^2 \equiv 0,$$

dass daher, wenn X, wie die ersten 4 Gleichungen verlangen, der Punkt x von S, $M_X m_x^2 m_y \equiv 0$ sein muss.